Collection iParcours

Maths

Manuel

Cycle 4

4^e

Sébastien Dumoulard
Professeur certifié de mathématiques

Katia Hache
Professeure certifiée de mathématiques

Sébastien Hache
Professeur certifié de mathématiques

Jean-Philippe Vanroyen
Professeur agrégé de mathématiques

Génération 5

Sommaire

nombres et calculs

N1 Opérations sur les nombres relatifs **5**

Nombres relatifs
Addition et soustraction
Multiplication
Division
Calculs variés

N2 Fractions : comparaison et addition **23**

Égalité de quotients
Comparaison
Addition et soustraction

N3 Fractions : multiplication et division **37**

Multiplication
Produit en croix
Division
Calculs variés

N4 Puissances **51**

Puissances d'un nombre relatif
Puissances de 10
Notation scientifique

N5 Calcul littéral **65**

Développer
Factoriser
Réduire
Produire et calculer des expressions littérales

N6 Équations **81**

Solution d'une équation
Résoudre une équation
Résoudre un problème

grandeurs et mesures espace et géométrie

G1 Théorème de Pythagore **93**

Vocabulaire du triangle rectangle
Théorème de Pythagore
Démontrer qu'un triangle est rectangle ou non

G2 Cosinus **109**

Définition du cosinus
Calculs de longueurs
Calculs d'angles

G3 Translations, rotations **121**

Définition de la translation
Définition de la rotation
Constructions
Propriétés

G4 Espace **135**

Vocabulaire
Représentations de solides
Sections de solides
Aires et volumes

Auteurs et relecteurs

Sébastien Dumoulard, Katia Hache, Sébastien Hache, Jean-Philippe Vanroyen.

Association Sésamath pour les contenus issus des manuels Sésamath (Éditeur : Génération 5) : *Madeleine Abrahami, Jean-Hervé Amblard, Rémi Angot, Thierry Ansel, Loïc Arsicaud, Audrey Aulard, Michèle Badri, Sandrine Baglieri, Denis Bodet, Gilles Bougon, Rémi Boulle, Sylvain Bourdalé, Fabien Bourg, Xavier Birnie-Scott, Françoise Cabuzel, Maxime Cambon, Dominique Cambresy, Vinciane Cambresy, Alexandre Carret, Laurent Charlemagne, Audrey Chauvet, Emmanuel Chauvet, Françoise Chaumat, Gwenaëlle Clément, Benjamin Clerc, Sébastien Cogez, Claire Coffy Saint Jalm, Denis Colin, Sophie Conquet-Joannis, Robert Corne,Marie-France Couchy, Emmanuel Coup, Thomas Crespin, Olivier Cros Mouret, Sébastien Daniel, Stéphane Dassonville, Marie-Claude David, Noël Debarle, Daniel Dehaes, Muriel De Seze-Petersen, Rémi Deniaud, Rémy Devoddère, Audrey Dominique, Claire de Dreuille, Anne-Marie Drouhin, Francine Dubreucq, Ludyvine Dumaisnil, Corinne Dupuich, Éric Elter, Anne-Marie Fleury, Élisabeth Fritsch, Jean-Marc Gachassin, Yolande Garouste, Hervé Galliot, Christelle Gauvrit, Franck Gaye, Nathalie Gendre, Martine Genestet, Stéphane, Geyssely, Gérard Goillot, Hélène Gringoz, Odile Guillon, Jalil Haraki, Karine Helies, Laurent Hennequart Hubert Herbiet, Géraldine Hilaire, Pierre-yves Icard, Nathalie Irbah, Olivier Jaccomard, Julien Jacquet, Sébastien Jolivet, Virginie Jourand, Jean-Louis Kahn, Stéphane Kervella, Bruno Lambert, Angelo Laplace, Alexandre Lecomte, Yann Le Flem, Marion Le Grognec, Isabelle Lemaître, Nicolas Lemoine, Loubia Leroux, Sandrine Le Saint Martine Lescure, Anne Levacher, Rafael Lobato, François Loric, José Marion, Marc Masson, Aline Meunier, Benoît Montessinos, Nicolas Moreau, Julien Noël-Coulibaly, Emmanuel Ostenne, Xavier Ouvrard Brunet, Christophe Paumelle, Christian Payros, Séverine Peinado, Juliette Pelecq, Sylvie Perrigault, Sophie Pesnel Muller, Sylvain Petit, Mireille Poncelet, Olivier Pontini, Virginie Poirier, Yann Pradeau, Yann Pozzar, Nicolas Prudhomme, Nelly Reclus, Stéphane Renouf, Christophe Rindel, Sabrina Roberjot, Christophe Roland, Arnaud Rommens, Pascal Sabate, Abdel Saraf, Claudine Schwartz, Boris Sissoeff, Michel Souchet, Jean-Paul Sousa, Patricia Stin, Michel Suquet, Anne Svirmickas, Aurélie Tarot, Wilfrid Tétard, Marielle Trot-Massé, Nicolas Van Lancker, Corinne Vilchair, Gérard Vinot, Isabelle Vivien, Laurent Zamo.*

organisation et gestion de données, fonctions

D1 Proportionnalité 147

Quatrième proportionnelle
Pourcentages
Vitesse, distance et temps
Grandeurs composées

D2 Statistiques 159

Étendue
Médiane
Moyenne pondérée

D3 Probabilités 167

Notion de probabilité
Des fréquences aux probabilités

algorithmique et programmation

A1 Algorithmique et programmation 177

Programmation débranchée
Activités Scratch
Exemples de projet
Tutoriel Scratch

Des outils pour raisonner 206

Corrigés des exercices 212

Lexique, l'essentiel des notions 217

Formulaire 224

Dans ce manuel, les chapitres
sont constitués de plusieurs rubriques.

Activités Des activités de découverte et d'investigation, souvent issues de la vie quotidienne, permettent à l'élève d'appréhender les principales notions étudiées dans le chapitre.

Cours Dans cette partie, les définitions et propriétés à connaitre sont expliquées par des exemples clairs. Pour chaque notion, des exercices, corrigés en fin de manuel, permettent à l'élève de vérifier son savoir-faire : **n°...**.

Exercices Le nombre et la variété des exercices permettent à l'élève de travailler à son rythme, en vue d'acquérir les connaissances et compétences attendues en fin de cycle. Ils sont triés par notion et par difficulté :

- Exercices oraux
- Exercices d'entrainement
- Exercices d'approfondissement
- Exercices de synthèse

Les outils numériques (tableur, instruments de géométrie dynamique, logiciel Scratch) sont utilisés dans chaque chapitre.

Lexique Formulaire Dans le lexique, l'élève retrouve la définition du vocabulaire mathématique étudié. Le formulaire, lui, rassemble les formules mathématiques à connaitre.

Génération 5 Version papier : Armelle Ronco, Valérie Gazzola, Catherine Groleau, David Mignot.
Version numérique : Bernard Domenge, Sébastien Rey, Pascal Scheerlinck, Thierry Billardon.

Graphismes et illustrations Dominique Sénon, Fabrice Rousselot.

Manuel numérique

La totalité du manuel sur Internet !

www.iparcours.fr

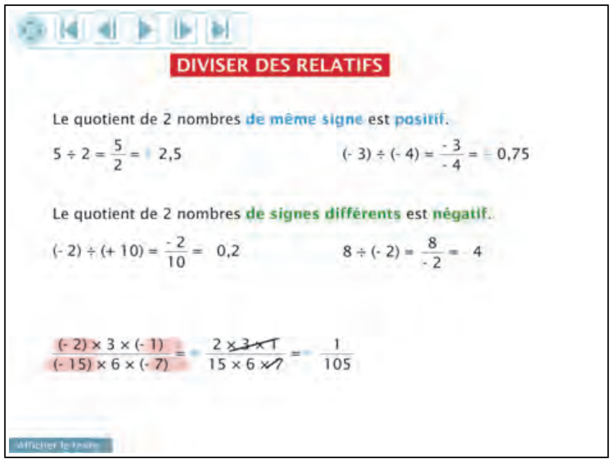
www.iparcours.fr

Allège ton cartable et retrouve en ligne tout ce dont tu as besoin : cours, exercices et problèmes, lexique et formulaire, etc.

Tu pourras aussi accéder à de **nombreux compléments numériques** pour travailler à ton rythme.

Aides animées sonorisées

Les principales notions sont reprises étape par étape.

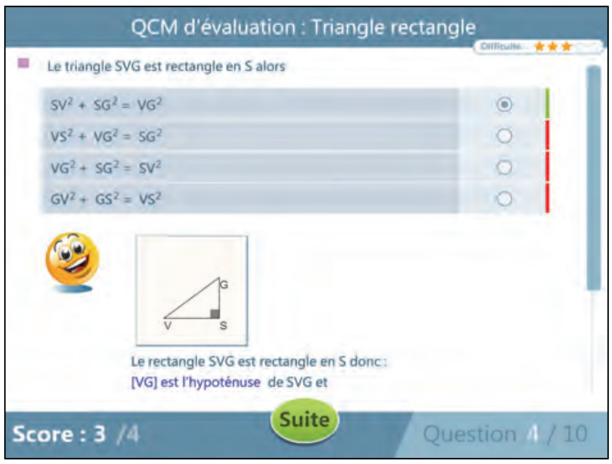


Exercices interactifs

- Des **QCM** pour t'entrainer et t'auto-évaluer
- Des activités sur **tableur**
- Des activités en **géométrie dynamique**
- Une initiation à la **programmation**

Lexique et formulaire

- Tu vérifies le sens d'un terme mathématique.
- Tu t'assures de la justesse d'une formule mathématique.



Questions FLASH

Des questions orales pour vérifier que tu as bien compris les points essentiels du cours.

LE MANUEL NUMÉRIQUE du PROFESSEUR

L'intégralité des corrigés

(inscription : www.iparcours.fr)

- corrigés : animés ou fixes
- vidéos pour corriger les exercices TICE

La projection en classe

- affichage simultané de plusieurs compléments
- excellente lisibilité (mode vectoriel)

Le mode Édition

- outils pour expliquer, commenter
- pages personnelles pour préparer les séances

N1

Opérations sur les nombres relatifs

Activités

1 Produit de deux nombres relatifs

Cours : 2A

a Calcule (– 5) + (– 5) + (– 5) + (– 5). Quel produit peut-on en déduire ?
Calcule, en justifiant, les produits suivants : $(-3) \times 7$; $(-1) \times 8$; $(-4{,}5) \times 4$.
Quelle règle peux-tu énoncer pour calculer le produit d'un nombre entier par un nombre relatif ?

b On souhaite effectuer la multiplication : $3{,}8 \times (-1{,}5)$.
Calcule le produit $38 \times (-1{,}5)$ puis déduis-en le produit précédent.
À l'aide d'une méthode analogue, calcule le produit de 4,31 par – 1,7.

c On souhaite effectuer le produit : $(-5) \times (-7{,}1)$.
Voici une partie de la table de multiplication de – 7,1.

×	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5
– 7,1						0	– 7,1	– 14,2			

Reproduis et complète cette table.
Peut-on calculer directement le produit $-5 \times (-7{,}1)$?

d Essaie d'énoncer une méthode générale permettant de multiplier deux nombres relatifs.

2 Quotient de deux nombres relatifs

Cours : 4

Soient a et b deux nombres ($b \neq 0$).

Le quotient de a par b est le nombre noté $\frac{a}{b}$ vérifiant $\frac{a}{b} \times b = a$.

a En utilisant la définition précédente, détermine les quotients suivants : $\frac{12}{-4}$; $\frac{-36}{-9}$; $\frac{-18}{12}$.

b On sait que le quotient $\frac{3}{8}$ est égal à 0,375.

Peut-on en déduire rapidement les quotients $\frac{-3}{8}$; $\frac{3}{-8}$ et $\frac{-3}{-8}$?

c Essaie d'énoncer une règle permettant de calculer le quotient de deux nombres relatifs.

3 Calculs astucieux

Cours : 2B

a Le produit de 15 facteurs est négatif. On sait que, parmi eux, 13 facteurs sont positifs mais on ne connait pas les deux derniers facteurs.
Peut-on, malgré tout, déterminer le signe du produit de ces deux facteurs inconnus ?

b Voici un produit :
$(-4) \times (-1) \times (-10) \times (-50) \times 10 \times 2 \times (-25)$.
Élise a calculé très rapidement ce produit.
Comment a-t-elle procédé ?

1 Addition et soustraction

A Addition de nombres relatifs

→ 26

Propriété

- La **somme de deux nombres relatifs de même signe** est un nombre relatif qui a pour signe le signe commun aux deux nombres, et pour distance à zéro la somme des distances à zéro.
- La **somme de deux nombres relatifs de signes contraires** est un nombre relatif qui a pour signe le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro, et pour distance à zéro la différence des distances à zéro.

Exemple 1 :

A = (– 2) + (– 3)	→	On veut additionner deux nombres relatifs de même signe.
A = – (2 + 3)	→	On additionne leur distance à zéro et on garde le signe commun : –.
A = – 5	→	On calcule.

Exemple 2 :

B = (– 5) + (+ 7)	→	On veut additionner deux nombres relatifs de signes contraires.
B = + (7 – 5)	→	On soustrait leur distance à zéro et on écrit le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro : + 7.
B = + 2	→	On calcule.

B Soustraction de deux nombres relatifs

→ 37

Définition L'**opposé d'un nombre relatif** est le nombre de signe contraire qui a la même distance à zéro.

Exemple 1 : Les opposés des nombres relatifs : – 2 531 ; 0 ; 1 245 ; – 0,03 et + 0,003
sont + 2 531 ; 0 ; – 1 245 ; + 0,03 et – 0,003.

Propriété

Soustraire un nombre relatif revient à ajouter **son opposé**.

Exemple 2 :

C = (– 2) – (– 3)	→	On veut soustraire le nombre – 3.
C = (– 2) + (+ 3)	→	On additionne l'opposé de – 3 qui est + 3.
C = + (3 – 2)	→	On ajoute deux nombres de signes contraires, donc on soustrait leur distance à zéro, et on prend le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro : + 3.
C = + 1	→	On calcule.

C Enchainement de calculs

→ 40

Exemple 1 :

D = (+ 4) + (– 5) – (– 8)		
D = (+ 4) + (– 5) + (+ 8)	→	On transforme la soustraction en addition de l'opposé.
D = (– 1) + (+ 8)	→	On effectue les calculs de gauche à droite.
D = + 7	→	On termine le calcul.

Exemple 2 :

E = (+ 4) + (– 11) – (+ 3)		
E = (+ 4) + (– 11) + (– 3)	→	On transforme la soustraction en addition de l'opposé.
E = + 4 – 11 – 3	→	On supprime les signes d'addition et les parenthèses autour des nombres.
E = – 10	→	On termine le calcul.

2 Multiplication de nombres relatifs

A Multiplication de deux nombres relatifs → 49

Propriété Le produit de deux nombres relatifs est un nombre relatif qui a pour distance à zéro le produit des distances à zéro des deux nombres, et :
- un signe positif si les deux nombres relatifs sont de **même signe** ;
- un signe négatif si les deux nombres relatifs sont de **signes contraires**.

Exemple 1 :

F = (– 4) × (– 2,5)	→	On veut multiplier deux nombres relatifs de même signe.
F = 4 × 2,5	→	Le résultat est positif car c'est le produit de deux nombres relatifs de même signe (négatifs).
F = 10	→	On calcule.

Exemple 2 :

G = 0,2 × (– 14)	→	On veut multiplier deux nombres relatifs de signes contraires.
G = – (0,2 × 14)	→	Le résultat est négatif car c'est le produit de deux nombres de signes contraires (un nombre positif par un nombre négatif).
G = – 2,8	→	On calcule.

Propriété
Multiplier un nombre relatif par – 1 revient à prendre **son opposé**.

Remarque : Cela signifie que, pour tout nombre relatif a : $-1 \times a = -a$.

B Multiplication de plusieurs nombres relatifs

Propriété Le produit de plusieurs nombres relatifs est :
- **positif** s'il comporte un nombre **pair** de **facteurs négatifs** ;
- **négatif** s'il comporte un nombre **impair** de **facteurs négatifs**.

Exemple 1 :
Le produit H = – 6 × 7 × (– 8) × (– 9) comporte trois facteurs négatifs, donc H est négatif.

Exemple 2 :

J = 2 × (– 4) × (– 5) × (– 2,5) × (– 0,8)	→	On détermine d'abord le signe de ce produit.
J = 2 × 4 × 5 × 2,5 × 0,8	→	Le produit comporte quatre facteurs négatifs. Or 4 est pair, donc J est positif.
J = (2 × 5) × (4 × 2,5) × 0,8	→	On associe les facteurs de manière astucieuse.
J = 10 × 10 × 0,8 = 80	→	On calcule.

3 Nombres relatifs inverses

Propriété Deux nombres relatifs sont inverses si leur produit est égal à 1.

Exemple :

- Les nombres 0,2 et 5 sont des nombres inverses car $0{,}2 \times 5 = 1$.
- De même que les nombres – 4 et – 0,25 car $(-4) \times (-0{,}25) = 1$.

4 Division de deux nombres relatifs

→ 79

Propriété Le quotient de deux nombres relatifs est un nombre relatif qui a pour distance à zéro le quotient des distances à zéro des deux nombres, et :

- un signe positif si les deux nombres relatifs sont de **même signe** ;
- un signe négatif si les deux nombres relatifs sont de **signes contraires**.

Exemple 1 :

$K = 65 \div (-5)$ → On détermine d'abord le signe de ce quotient.

$K = -(65 \div 5)$ → Le résultat est négatif car c'est le quotient de deux nombres relatifs de signes contraires (un nombre positif par un nombre négatif).

$K = -13$ → On calcule.

Exemple 2 :

$L = \dfrac{-30}{-4}$ → On détermine d'abord le signe de ce quotient.

$L = \dfrac{30}{4}$ → Le résultat est positif car c'est le quotient de deux nombres relatifs de même signe (négatifs).

$L = 7{,}5$ → On calcule.

Remarques :

- La règle des signes pour la division est la même que celle pour la multiplication.
- Le quotient de 0 par n'importe quel nombre non nul est égal à 0.

Cela signifie que, pour tout nombre relatif non nul a, on a : $\dfrac{0}{a} = 0$.

5 Calculs avec des nombres relatifs

→ 102

Propriété Dans une suite d'opérations avec des nombres relatifs, on effectue **dans l'ordre** :

- les calculs entre parenthèses,
- les multiplications et divisions,
- les additions et soustractions.

Exemple :

$M = -4 - 5 \times (-2 - 6)$ → On repère le calcul prioritaire.

$M = -4 - 5 \times (-8)$ → On effectue d'abord le calcul entre parenthèses.

$M = -4 + 40$ → On effectue ensuite la multiplication.

$M = 36$ → On termine par l'addition.

Exercices

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Calcule.

A = (– 12) + (+ 4)
C = (+ 6) – (– 1)
B = – 13 – 1
D = –0,1 + 0,1

2 On considère les quatre nombres : – 2 ; 5 ; – 12 ;– 3.

a. Range-les dans l'ordre décroissant.

b. Calcule leur somme.

3 Calcule.

E = 5 × (– 4)
G = (– 6) × (– 7)
F = (– 3) × 9
H = (+ 5) × (– 5)

4 Calcule.

I = (– 10) × (– 0,64)
K = (– 13,1) × 0
J = (– 2) × (– 8,3)
L = (– 1,5) × (+ 4)

5 Complète les pointillés pour que les égalités soient vraies.

a. 3 × ... = (– 18)
b. ... × ... = (– 2)
c. (+ 9) × ... = (– 72)
d. ... × (– 4) = 16

6 Sachant que 79 × 57 = 4 503, calcule.

M = (– 79)× (– 57)
N = (– 0,79) × 570

7 Calcule.

P = (– 100) : (– 10)
R = (– 7,7) : (+ 7,7)
Q = 27 : (– 3)
S = (– 75) : (– 25)

8 Calcule.

$T = \frac{-21}{7}$ $U = \frac{-12}{-24}$ $V = \frac{81}{-9}$ $W = \frac{-3,3}{-3,3}$

9 Pour ces calculs, donne un ordre de grandeur du résultat.

X = (– 101,06) × 0,099
Y = (– 87,07) : (– 86,97)

10 Calcule astucieusement.

Z = 5 × (– 2,5) × (– 20) × (– 40) × (– 3,1)

11 Construis quatre phrases à partir des mots et nombres ci-dessous.

quotient | différence

3 | - 5 | - 15 | 10

somme | produit

12 Calcule.

A = (– 8) + (+ 4)
D = 4 – (– 8)
B = 4 × (– 8)
E = (– 8) : (– 4)
$C = \frac{-4}{8}$
$F = \frac{-4-8}{8+4}$

13 ***Le compte est bon***

42 | – 3 | – 4 | – 5 | – 6

14 **Vrai ou Faux**

P.1. (– 4) × (– 9) = (– 13)

P.2. Le produit de (– 2) par 17 est égal au produit de (– 17) par 2.

P.3. L'inverse de – 10 est 0,1.

P.4. L'inverse de l'opposé de – 2 est 0,5.

P.5. Le produit de 128 nombres négatifs est négatif.

Nombres relatifs

15 Compare les nombres relatifs suivants.

a. – 3 et + 2
b. + 1 et + 9
c. – 5 et – 9
d. – 4 et – 1
e. – 8 et + 8
f. + 5 et – 1
g. – 25 et – 35
h. – 43 et + 43

16 Compare les nombres relatifs suivants.

a. + 4 et + 6
b. – 6 et – 2
c. – 2 et – 4
d. 0 et – 8
e. + 3 et – 4
f. + 4 et – 14
g. – 12 et – 18
h. – 212 et + 212

17 Compare les nombres relatifs suivants.

a. + 3,5 et – 4,5
b. – 4,1 et – 4,7
c. – 8,8 et – 8,42
d. – 20,3 et + 20,2
e. + 4,25 et + 4,2
f. – 2,25 et – 2,205
g. – 2,12 et – 4,7
h. 0,01 et – 0,01

18 On considère les nombres relatifs suivants.

– 8	+ 14	– 12	+ 10	– 13

a. Range ces nombres dans l'ordre croissant.

b. Range dans l'ordre croissant les opposés de ces nombres.

c. Que remarques-tu ?

19 Range les nombres suivants dans l'ordre décroissant.

– 40,7	+ 4,07	– 4,07	+ 4,7	– 4,7

20 ***Listes***

a. Donne la liste de tous les nombres entiers relatifs compris entre – 5,5 et + 3,5.

b. Combien existe-t-il de nombres entiers relatifs n tels que $n \leqslant -2{,}5$ et $n \geqslant -6{,}4$?

c. Combien existe-t-il de nombres entiers relatifs à un chiffre ?

d. Combien existe-t-il de nombres entiers relatifs à deux chiffres ?

21 ***Intercaler***

a. Recopie et complète par des nombres relatifs.

– 2 < ... < ... < ... < ... < ... < + 2

b. Intercale quatre nombres relatifs entre les nombres – 10 et – 11.

22 ***Météo***

Anaktuvuk Pass est une ville d'Alaska, aux États-Unis. Voici les prévisions météo pour la semaine prochaine à cet endroit.

-9° -16°	-8° -13°	-7° -13°	-9° -14°	-10° -20°	-15° -23°	-21° -26°
L	M	M	J	V	S	D

a. Quel jour de la semaine va connaitre la température maximale la plus froide ? La plus chaude ?

b. Range les jours de la semaine prochaine dans l'ordre croissant de leur température maximale.

c. Quel jour devrait connaitre la plus grande amplitude thermique ?

23 Dans chaque cas ci-dessous, encadre le nombre donné par deux nombres relatifs entiers consécutifs.

a. ... < + 3,1 < ...
b. ... < – 5,7 < ...
c. ... < + 43,5 < ...
d. ... < + 0,34 < ...
e. ... < – 22,5 < ...
f. ... < + 1 000,4 < ...
g. ... < – 0,1 < ...
h. ... < – 999,3 < ...

24 ***Dans un repère***

a. Trace un repère d'unité 1 carreau pour chaque axe puis place les points suivants.

A(– 3 ; 1) ; B(3 ; 2) ; C(0 ; – 3) et D(– 2 ; – 2)

b. Existe-t-il des points à l'intérieur du quadrilatère ABCD dont l'abscisse est un nombre entier strictement négatif, et l'ordonnée un nombre entier strictement positif ? Si oui, donne leurs coordonnées.

c. Place le milieu F du segment [AB].
Donne ses coordonnées.

25 **TICE Géométrie Dynamique**

Reprends l'exercice précédent en plaçant les points à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Addition et soustraction

26 Effectue les additions suivantes.

a. (+ 6) + (+ 7)
b. (− 1) + (+ 1)
c. (− 3) + (− 5)
d. (+ 11) + (− 12)
e. (− 5) + (− 15)
f. (+ 3) + (− 8)
g. (− 22) + (+ 17)
h. (− 9) + (+ 20)

27 Effectue les additions suivantes.

a. (+ 3,5) + (− 1,5)
b. (− 5,4) + (− 10,4)
c. (+ 1,9) + (− 8,3)
d. (+ 8,35) + (+ 17,2)
e. (− 0,84) + (+ 1)
f. (− 3,25) + (− 5,75)

28 Recopie et complète.

a. (+ 3) + (...) = (+ 9)
b. (...) + (+ 12) = 9
c. (− 4) + (...) = (− 11)
d. (+ 5) + (...) = (+ 1)
e. (...) + (+ 4) = 0
f. (...) + (− 17) = 4
g. (+ 9) + (...) = (− 9)
h. (...) + (− 6) = (− 6)

29 Reproduis et complète les tables d'addition.

a.

+	− 12	+ 14	+ 21	− 8
− 10				
+ 7				
+ 9				
− 11				

b.

+		+ 6	+ 16	
− 6		0		
+ 6	− 3			
+ 13				+ 6
			+ 6	

30 Transforme chaque soustraction en addition puis effectue-la.

a. (+ 1) − (+ 3)
b. (− 20) − (+ 12)
c. (− 7) − (− 7)
d. (+ 13) − (+ 17)
e. (+ 22) − (− 11)
f. (+ 8) − (+ 6)
g. (− 4) − (+ 4)
h. (+ 43) − (− 17)

31 ***De grands hommes***

a. Donne l'année de naissance de chaque personnage en fonction des éléments donnés.

- Innocent III, mort vers 1 216 à 56 ans.
- Cyrus II, mort vers − 530 à 30 ans.
- Ramses II, mort vers − 1 213 à 91 ans.

b. Combien d'années a vécu Ashoka, né vers − 304 et mort vers − 232 ?

32 ***Quels termes ?***

a. Donne cinq nombres relatifs dont la somme vaut − 2 016.

b. Donne cinq nombres relatifs non entiers dont la somme est nulle.

33 Effectue les calculs suivants.

a. (− 2) − (− 2) − (− 4) + (+ 4)
b. (+ 2) − (− 8) + (− 6) − (+ 9)
c. (− 11) − (− 4) + (− 1) − (+ 5)
d. (− 13) − (− 15) − (− 20) + (+ 25)

34 **QCM**

a. (− 5) + (− 2,5) =

R.1	R.2	R.3
(− 2,5)	7,5	(− 7,5)

b. − 13 + ... = − 8. Le nombre manquant est ...

R.1	R.2	R.3
− 21	5	21

c. − 6 est le résultat de ...

R.1	R.2	R.3
(− 9) + (− 5)	− 1 + 5	(− 3) − (+ 3)

d. − 12 + 6 + 11,3 + 6 − 0,3 =

R.1	R.2	R.3
− 35,6	11	− 1

35 ***Des mathématiciens grecs***

Thalès est né vers – 624 à Milet, tandis que Pythagore est né vers – 580 à Samos.

Pour répondre aux questions, tu effectueras des recherches dans un dictionnaire ou sur Internet.

a. Lequel de ces mathématiciens est mort le plus vieux ?

b. Quelle est leur différence d'âge ?

c. Auraient-ils pu se rencontrer ?

36 Effectue les calculs suivants.

A = (– 10) + (+ 30) + (– 40) + (+ 80) + (– 100)

B = (+ 150) + (+ 25) + (+ 25) + (– 225)

C = (– 26) + (– 29) + (+ 16) + (+ 24) + (– 11)

D = (+ 230) + (– 120) + (+ 150) + (– 90)

37 Effectue les calculs suivants.

a. 6 – 7	**e.** 14 – 20	**i.** – 28 – 8
b. – 3 – 5	**f.** – 44 – 44	**j.** – 3 + 19
c. – 13 + 23	**g.** – 55 + 45	**k.** 32 – 100
d. 9 – 18	**h.** 200 – 73	**l.** – 18 – 28

38 Effectue les calculs suivants.

a. 85 – 93	**d.** 77 – 88	**g.** – 56 + 43
b. – 39 – 50	**e.** 50 – 75	**h.** 25 – 80
c. – 93 + 92	**f.** – 88 – 88	**i.** – 99 – 199

39 Effectue les calculs suivants.

a. – 2,5 – 4,2	**e.** – 6 + 10,6
b. – 1,7 + 4,2	**f.** 3,8 – 1,1
c. 0,2 – 0,9	**g.** – 1,62 + 0,62
d. – 3,25 – 3,75	**h.** – 5,5 – 50,5

40 Calcule.

A = 33 – 23 + 27 – 57 + 38

B = – 33 + 23 – 27 + 57 – 38– 1 000

C = 330 – 230 + 270 – 570 + 380

D = 3,3 – 2,3 + 2,7 – 5,7 + 3,8

41 La course nature du lac d'Annecy applique des pénalités en cas de non respect du règlement. En voici un extrait :

- *Ravitaillement d'un coureur hors des zones prévues à cet effet : – 15 points (– 30 points en cas de récidive)*
- *Flagrant délit de non respect de l'environnement durant la course : – 50 points (disqualification en cas de récidive)*

Jérôme a terminé la course en 5 h 07 min, soit avec un score de 485 points. Mais il écope de quatre pénalités : il s'est ravitaillé trois fois hors des zones prévues et a jeté des détritus juste devant un juge de course !
Quel score sera finalement attribué à Jérôme ?

42 Effectue les calculs suivants.

A = 44 – 39 + 23	D = 15 – 12 + 4 – 16
B = – 43 – 38 + 35	E = – 39 + 44 – 31
C = – 12 – 12 + 12	F = 10 – 20 + 30 – 40

43 Calcule les expressions suivantes.

G = (– 3 + 10) – (4 – 15) – (– 12 – 8)

H = – 33 + 2 – (1 – 8) – (3 + 11)

I = – 23 – [40 – (3 – 19)]

J = – 6 + [(11 – 18) – (33 + 6) – (5 – 11)]

44 ***Étourdi !***

Jonas tient ses comptes à jour sur un carnet où il note chaque mois toutes ses dépenses et tous ses gains d'argent. Ce mois-ci, il a noté un solde positif : + 11,75 €.

Hélas, il a oublié de prendre en compte ses achats d'hier à la boulangerie (1,05 €) et n'a pas noté les deux fois où ses grand-parents lui ont donné un billet de 5 €.

Écris une suite d'opérations permettant de rectifier les oublis de Jonas et trouve ainsi le montant correct du solde en fin de mois.

Multiplication

45 Recopie et complète.

A = (– 4) + (– 4) + (– 4) + (– 4) + (– 4)
A = (– 4) × ...
A = ...

B = (– 8,2) + (– 8,2) + (– 8,2)
B = (– 8,2) × ...
B = ...

C = (– 1,7) + (– 1,7) + (– 1,7) + (– 1,7)
C = (– 1,7) × ...
C = ...

46 Sans l'effectuer, donne le signe de chaque produit.

– 36 × (– 1) 3,6 × (– 3,6) (+ 7) × (+ 7,7)

(– 2) × (+ 24) (+ 1,4) × (– 15,4)

47 Quel est le signe du résultat lorsqu'on multiplie...

a. ... un nombre négatif par un nombre positif ?
b. ... quatre nombres négatifs entre eux ?
c. ... un nombre positif et deux nombres négatifs ?
d. ... un nombre relatif par lui-même ?
e. ... trois nombres négatifs entre eux ?

48 Relie chaque calcul à son résultat.

(+ 5) × (– 4)	•	•	– 15
(– 5) × (– 3)	•	•	– 20
(– 3) × (+ 4)	•	•	– 12
(+ 4) × (+ 4)	•	•	+ 12
(– 4) × (– 3)	•	•	– 16
(– 5) × (– 4)	•	•	+ 20
(– 5) × (+ 3)	•	•	+ 15
(– 4) × (+ 4)	•	•	+ 16

49 ***Calcul mental***

a. (– 8) × (+ 2)
b. (– 2) × (+ 5)
c. (– 4) × (– 8)
d. (+ 9) × (+ 10)
e. (+ 191) × (+ 0,1)
f. (– 1,5) × (+ 20)
g. (– 0,25) × (– 4)
h. (+ 0,8) × (– 3)
i. (– 3,2) × (+ 4)
j. (– 1) × (– 17)

50 ***Calcul mental***

a. (– 7) × (+ 7)
b. (– 80) × (– 6)
c. (+ 0,7) × (– 9)
d. (– 8,2) × (+ 4)
e. (– 100) × (– 137)
f. (– 5) × (+ 200)
g. (– 25) × (+ 40)
h. (– 11) × (– 34)
i. (+ 66) × (+ 0,01)
j. (+ 23,5) × (+ 0,1)

51 Reproduis et complète les tables de multiplication.

a.

×	– 1	+ 4	+ 20	– 8
– 7				
+ 8				
+ 9				
– 11				

b.

×	– 1		– 6	
– 7				
+ 8		– 24		
+ 12				+ 60
	– 2			

52 Calcule, sachant que 11,2 × 2,5 = 28.

a. 11,2 × (– 2,5)
b. – 11,2 × (– 2,5)
c. 1,12 × (– 25)
d. 112 × (– 25)

53 ***D'un produit à l'autre***

a. Calcule le produit 7,5 × 0,2.
b. Effectue alors les calculs suivants.

A = 7,5 × (– 0,2)
B = (– 0,2) × (– 7,5)
C = (– 75) × (+ 0,2)
D = (– 7,5) × (– 20)

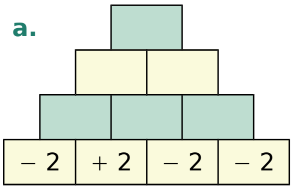
54 Relie les expressions égales.

(+ 5) × (– 12)	•	•	(– 1) × (+ 20)
(– 8) × (– 3)	•	•	(+ 12) × (+ 5)
(+ 4) × (– 6)	•	•	(+ 2) × (+ 12)
(+ 5) × (– 4)	•	•	(+ 5) × (+ 4)
(+ 2) × (+ 10)	•	•	(– 3) × (+ 20)
(– 2) × (– 30)	•	•	(– 12) × (+ 2)

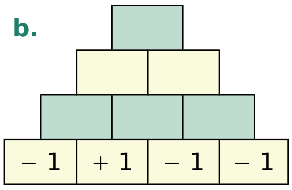
55 *Pyramides*

Recopie puis complète les pyramides suivantes afin que le nombre contenu dans une case soit le produit des nombres contenus dans les deux cases situées en dessous de lui.

a.



b.



56 Donne le signe de chaque produit.

A = 5,4 × (– 3,2) × (+ 4) × (– 5,1)

B = (– 0,5) × (– 9) × 0 × 7 × (– 1,4) × (– 1)

C = – 6 × (– 10) × 4 × (– 9) × (– 3) × (– 4,1)

57 Effectue les calculs suivants.

A = (– 2) × (– 3) × (+ 5)

B = (– 3) × (– 2) × (– 4)

C = (+ 6) × (– 1) × (+ 3)

58 QCM

a. (– 5) × (– 4) =

R.1	R.2	R.3
9	– 20	20

b. – 10 est le résultat de ...

R.1	R.2	R.3
(– 2,5) × (– 4)	2 × (– 5)	(– 9) × (– 1)

c. Le résultat de (– 7) × 14 × 7 × (– 14) est ...

R.1	R.2	R.3
positif	nul	négatif

d. (– 1) × 1 × (– 1) × ... = (– 1)
Le nombre manquant est ...

R.1	R.2	R.3
0	1	(– 1)

59 Effectue les calculs suivants.

A = (– 3,2) × (– 10) × (+ 2) × (– 0,5)

B = (– 75) × (– 0,25) × (+ 4) × (+ 2)

C = (– 3) × (– 0,1) × (+ 5) × (+ 4)

D = (– 1,5) × (+ 4) × (– 1) × (+ 0,8) × (– 3)

E = (+ 2) × (– 10) × (+ 3) × (– 1) × (– 1)

60 Complète par le nombre qui convient.

a. (– 4) × ◊ = 20

b. (– 13) × ◊ = – 39

c. ◊ × 7 = – 42

d. ◊ × (– 11) = 121

61 Complète par le nombre qui convient.

a. (+ 4) × ◊ = – 100

b. (– 2,9) × ◊ = 29

c. ◊ × 17 = – 17

d. ◊ × (– 3) = – 99

62 *Décompositions*

a. Trouve toutes les façons de décomposer le nombre – 20 en produit de deux nombres entiers relatifs.

b. Trouve toutes les façons de décomposer le nombre 24 en produit de trois nombres entiers relatifs.

63 Donne le signe de chaque produit.

A = (– 1) × 2 × (– 3) × 4 × ... × (– 9)

B = (– 1) × (– 2) × (– 3) × (– 4) × ... × (– 12)

C = (– 4) × (– 3) × (– 2) × ... × 3 × 4 × 5

D = 5 × (– 10) × 15 × (– 20) × ... × (– 100)

E = 1 × (– 2) × 4 × (– 8) × ... × 1 024

64 Il fait 0°C et la température chute de deux degrés toutes les heures.

a. Combien de temps faudra-t-il pour que la température atteigne – 10°C ?

b. Quelle sera la température dans huit heures ?

65 Calcule, dans chaque cas ci-dessous, le produit xy.

a. x = 5 et y = – 3

b. x = – 2 et y = – 5

c. x = + 4 et y = – 11

d. x = – 0,5 et y = – 5,2

Exercices *Je m'entraine*

66 Recopie et complète le tableau suivant.

a	b	c	ab	$-ac$
+ 5	+ 3	− 7		
− 6	− 6	+ 4		
− 2	− 2	− 2		
− 3	− 5			+ 9
+ 4		− 7	0	
− 1				− 2

67 Calcule astucieusement.

A = (− 2) × (− 1,25) × (− 2,5) × (− 8)

B = (− 75) × (− 0,25) × (+ 2) × (+ 4)

C = (+ 0,01) × (− 25) × (− 13,2) × 4 × (− 3)

68 **Vrai ou Faux**

Quel que soit le nombre relatif a :

P.1. Le produit − 3 × a est négatif.

P.2. a^2 est positif.

P.3. Le double de a est positif.

P.4. Le produit de a par son opposé est négatif.

69 Calcule les expressions suivantes.

A = 3 − 4 × (5 − 2)

B = 5 − 2 × 3 + 2 × 7

C = $-10^2 \times (-11)^2$

D = $-2^3 \times (-2)^3$

E = 3 × 4 − 2 × (4 − 1)

F = − 3 + (1 − 5) × (− 6)

G = 1 − 2 × 3 + 4 × (− 5)

H = $-1 + (-2)^2 - (-3)^2$

70 **TICE Tableur**

a. Reproduis cette feuille de calcul dans un tableur.

	A	B
1	Nombre de départ	
2	Opposé du nombre de départ	
3	Double du nombre de départ	
4	Opposé du double du nombre de départ	

b. Si on écrit le nombre dans la cellule B1, quelles formules faut-il saisir en B2 et B3 ?

c. Donne deux formules possibles à écrire en B4.

Division

71 Reproduis et complète le tableau suivant.

a	− 4		1 000	
Inverse de a		− 1		0,05

72 Sachant que 1 ÷ 16 = 0,0625...

a. Quel est l'inverse de 16 ?

b. Quel est l'inverse de − 0,0625 ?

73 Sachant que 125 × 8 = 1 000...

a. Quel est l'inverse de 8 ?

b. Quel est l'inverse de − 125 ?

c. Quel est l'inverse de − 80 ?

d. Quel est l'inverse de 1,25 ?

74 ***Inverse, opposé***

a. Quel est l'inverse de l'inverse de 10 ?

b. Quel est l'opposé de l'inverse de 10 ?

75 ***Histoire de signe***

Selon toi, un nombre non nul et son inverse peuvent-ils être de signes contraires ? Explique.

76 ***Qui dit vrai ?***

Je m'entraine — Exercices

77 Complète chaque égalité et écris chaque facteur manquant ◊ sous la forme d'un quotient.

a. (+ 6) × ◊ = + 18 donc ◊ = ...

b. (+ 5) × ◊ = – 20 donc ◊ = ...

c. ◊ × (– 7) = + 14 donc ◊ = ...

d. (– 2) × ◊ = + 12 donc ◊ = ...

e. ◊ × (– 10) = – 130 donc ◊ = ...

78 Sans les calculer, donne le signe des quotients suivants.

(– 3) ÷ (– 8)　　(+ 1) ÷ (– 1,2)

(– 4) ÷ (– 5)　　(– 3,7) ÷ (+ 5,1)

79 ***Calcul mental***

a. (– 100) ÷ (+ 25)

b. (– 42) ÷ (– 4)

c. (+ 54) ÷ (– 3)

d. (+ 55) ÷ (+ 5)

e. (– 24) ÷ (– 5)

f. (– 13) ÷ (– 10)

80 ***Calcul mental***

a. 64 ÷ (– 8)

b. 42 ÷ (– 6)

c. – 24 ÷ (– 3)

d. 81 ÷ (+ 9)

e. – 17 ÷ (– 1)

f. – 35 ÷ 7

g. (– 54) ÷ (– 6)

h. 25 ÷ (– 5)

i. (– 4) ÷ (+ 4)

j. (– 29) ÷ (+ 1)

81 QCM

a. L'inverse de – 3 est un nombre...

R.1	R.2	R.3
négatif	entier	décimal

b. Le quotient de (– 25) par (– 5) est égal à...

R.1	R.2	R.3
125	(– 25)	5

c. $\frac{12}{-3} =$

R.1	R.2	R.3
36	4	– 4

82 Parmi les nombres de la liste suivante, recopie ceux qui sont positifs.

$$\frac{-9}{+3} \; ; -\frac{-3}{+7} \; ; -\frac{5}{-2} \; ; -\frac{+1}{-10}$$

83 Simplifie l'écriture de chaque fraction.

Exemple : $\frac{-2}{+9} = -\frac{2}{9}$

a. $-\frac{+4}{+5}$　**c.** $\frac{7}{-3}$　**e.** $-\frac{1}{-10}$

b. $-\frac{-1}{-5}$　**d.** $-\frac{-8}{11}$　**f.** $-\frac{5}{-15}$

84 Sans calculatrice, donne l'écriture décimale de chacun des nombres suivants.

a. $-\frac{3}{-10}$　**c.** $\frac{-50}{+100}$

b. $-\frac{-64}{-8}$　**d.** $\frac{-3}{-2}$

85 Utilise ta calculatrice pour donner l'écriture décimale des nombres suivants.

a. $\frac{-5}{-40}$　**c.** $-\frac{-125}{-625}$

b. $-\frac{172}{-5}$　**d.** $\frac{-0{,}235}{+0{,}8}$

86 Dans chaque cas ci-dessous, calcule le quotient de x par y.

a. x = – 15 et y = – 3

b. x = + 64 et y = – 8

c. x = – 36 et y = 12

d. x = – 2,4 et y = 1,2

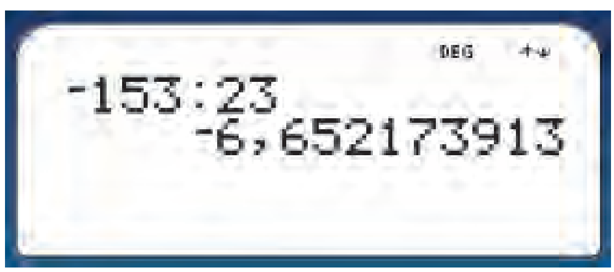
e. x = y = – 2,3

f. x = 0 et y = – 5

87 Recopie et complète le tableau suivant.

a	b	c	$a \div b$	$-a \div c$	$b \div c$
– 5	+ 4	– 4			
– 2,5	– 1	+ 20			
+ 8	– 4	– 0,5			
– 2,4	– 1,2	– 24			

88 Sarah a utilisé sa calculatrice pour calculer le quotient de – 153 par 23.



Sarah peut-elle toutefois en conclure que – 6,652173913× 23 = – 153 ? Explique.

Calculs variés

89 QCM

a. (– 2) × (– 9) =

R.1	R.2	R.3
3– 21	$\frac{-36}{-2}$	(+ 15) – (+ 3)

b. 15 est le résultat...

R.1	R.2	R.3
de la différence de – 5 et – 20	du produit de 5 et – 3	du quotient de 2 par 30

c. Quel est le plus grand résultat ?

R.1	R.2	R.3
8 × (– 8)	8 ÷ (– 8)	8 – (– 8)

90 Pour chaque question ci-dessous, donne au moins deux solutions différentes.

a. Écris – 80 sous la forme d'un produit de trois facteurs.

b. Écris – 7 sous la forme d'une somme de quatre termes.

c. Écris 125 sous la forme d'une différence de deux termes.

d. Écris – 12 sous la forme d'un quotient de deux nombres.

91 Donne un ordre de grandeur...

a. de la différence de 99,6 et – 10,02 ;
b. du produit de – 4 998 par – 0,0999 ;
c. de la différence de – 100,89 et 997,3 ;
d. du quotient de 50,01 par – 1,97.

92 Calcule les expressions suivantes.

$A = \frac{11}{2-5}$

$B = \frac{-6-3}{2+7}$

$C = \frac{-2-(-4)}{6-7}$

$D = \frac{2-11}{-3}$

$E = \frac{-36-3}{9+4}$

$F = \frac{7-(-11)}{-1-1}$

93 Recopie chaque égalité ci-dessous en la complétant par le signe opératoire qui convient.

a. – 3 + 7 ● 2 = 11
b. 11 ● 7,5 × 2 = – 4
c. 7,8 – 2,4 ● 2 = 3
d. – 11 – 7 ● 4 = – 22
e. – 4 ● 6 – 4 = – 28
f. 18 ÷ 6 ● (– 3) = – 1

94 TICE Tableur

- Choisir un nombre.
- Le multiplier par 5.
- Soustraire 1 au nombre obtenu.
- Multiplier par – 2 le nombre obtenu.

a. Applique ce programme à 3, puis à – 4.

b. Reproduis cette feuille de calcul dans un tableur. Si on écrit le nombre dans la cellule B1, quelles formules peut-on saisir en B2, B3 et B4 ?

	A	B	C
1	Nombre de départ		
2	Multiplier par 5		
3	Soustraire 1		
4	Multiplier par – 2		
5	Résultat final		

c. Teste plusieurs nombres positifs. Que remarques-tu ?

d. Teste plusieurs nombres négatifs. Que remarques-tu ?

95 Pour chacun des calculs suivants, indique s'il s'agit d'une somme ou d'un produit, puis donne le résultat.

a. – 4 × (+ 9)
b. – 3 – (+ 8)
c. – 7 + (– 5)
d. + 3 × (– 7)
e. – 8 + (+ 6)
f. + 9 × (+ 3)
g. – 5 – (– 16)
h. – 11 × (– 4)

96 Sans le calculer, donne le signe de chacun des calculs suivants.

a. (– 4) × (– 12)
b. (+ 15) + (– 22)
c. (– 45) – (– 51)
d. (– 37) × (+ 51)
e. (+ 7) × (+ 8)
f. (– 7) + (+ 8)
g. (– 3,12) × (– 2,5)
h. (– 3,17) – (+ 3,7)

97 ***Calcul mental***

a. 8 × (– 8)
b. – 22 + (– 6)
c. – 14 × 3
d. – 5 – (+ 17)
e. – 48 ÷ 3
f. (– 34) + (– 19)
g. – 15 × (– 5)
h. – 70 ÷ (– 5)

98 ***Calcul mental***

a. $(-4) \times (-2{,}5)$

b. $(+3{,}5) + (-2{,}2)$

c. $(-3{,}9) + (-5{,}4)$

d. $(-3) \times (+4{,}2)$

e. $(+2{,}6) \times (-3)$

f. $(-7{,}15) - (-2{,}2)$

g. $(-3{,}12) \times (-10)$

h. $(-0{,}4) - (+1{,}25)$

99 Pour chaque égalité suivante, remplace le symbole ◊ par le signe opératoire qui convient.

a. (-3) ◊ $(-2) = -5$

b. (-3) ◊ $(-2) = +6$

c. (-2) ◊ $(-2) = +4$

d. (-2) ◊ $(-2) = -4$

e. (-5) ◊ $(+4) = (-12)$ ◊ $(+8)$

100 Complète chaque suite de nombres.

a. 3 ; 1 ; − 1 ; ... ; ... ; ...

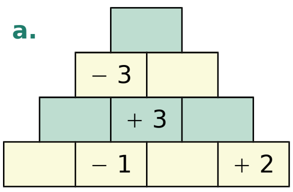
b. 1 ; − 2 ; + 4 ; ... ; ... ; ...

c. − 16 ; 8 ; − 4 ; ... ; ... ; ...

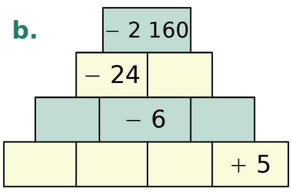
d. 0,5 ; − 5 ; 50 ; ... ; ... ; ...

101 Recopie puis complète les pyramides suivantes afin que le nombre contenu dans une case soit le produit des nombres contenus dans les deux cases situées en dessous de lui.

a.



b.



102 Effectue les calculs suivants en soulignant, à chaque étape, le calcul en cours.

$A = 7 + (-6) \times (-6)$

$B = 13 - (+3) \times (-4) - 8$

$C = -30 \div (-9 + 15)$

$D = -3 - 9 \times (-3)$

$E = -3 \times 6 \times (-2 + 8)$

103 Effectue les calculs suivants.

$A = -22 + (13 - 5) \times (-5)$

$B = (-2) \times (-8) + 2 \times (-20) \div 4$

$C = -28 + (5 - 2) \times (-4)$

$D = 7 \times (-7) + 3 \times (-25) \div (-5)$

$E = -3{,}2 \times (-6) + (-2{,}3 - 7{,}7)$

$F = 150 \div (-1{,}2 - 9 \times 3{,}2)$

104 ***Vocabulaire***

a. Traduis les phrases suivantes par un calcul.

- La somme du produit de 4 par − 5 et de − 6.
- Le produit de la somme de 7 et de − 8 par la somme de 8 et de − 2.

b. Effectue ces calculs.

105 ***Vocabulaire***

a. Traduis les expressions mathématiques suivantes par des phrases.

$A = 5 \times (-7) + 3$

$C = 7 - 4 \times (-10)$

$B = 3 + \dfrac{2}{-4}$

$D = \dfrac{1-7}{2+5}$

b. Effectue ces calculs.

106 Calcule...

a. $A = 3x - 7$ pour $x = +2$.

b. $B = -2x - 9$ pour $x = -5$.

c. $C = x^2 + 2$ pour $x = -1$.

107 Sachant que $a = 5$, $b = -3$ et $c = -10$, calcule les expressions suivantes.

$D = -2a$

$E = a - b$

$F = -3c + a$

$G = b - a - c$

108 Calcule $b^2 - 4ac$ dans les cas suivants.

1er cas : $a = 2$; $b = 3$ et $c = 5$.

2e cas : $a = -1$; $b = 2$ et $c = 3$.

3e cas : $a = 3$; $b = -2$ et $c = 2$.

109 ***Signes***

a. Si a est positif et b négatif, que peut-on dire du signe du nombre $\dfrac{-b}{2a}$?

b. Si $\dfrac{-b}{2a}$ est positif, que peut-on dire des signes de a et b ?

110 Calcule chaque expression pour $a = 3$, $b = -4$, $c = -5$ et $d = 7$.

$H = a - b + c$

$I = 2a - 3b$

$J = ac - bd$

$K = -5ac + bd$

$L = 2(a - b) + d$

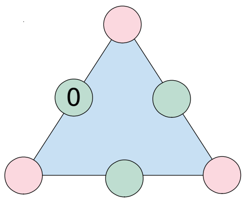
$M = 5(b - a) \div d$

111 *Qui suis-je ?*

Je suis un nombre entier relatif. Je suis supérieur à l'opposé de – 141 mais ma distance à zéro est inférieure à 152. Ah, j'oubliais ! Je suis un multiple de 7.

112 *Triangle magique*

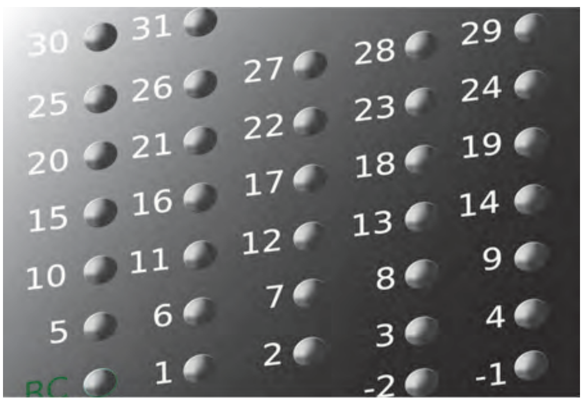
La somme des nombres de chaque côté du triangle est 2. Recopie cette figure puis remplis les cases vides avec les nombres relatifs (– 2) ; (– 1) ; 1 ; 2 et 3.



113 *Ascenseur fou*

Zahra se trouvait au rez-de-chaussée d'une tour de 31 étages. Elle est entrée dans l'ascenseur et a appuyé sur le bouton 3, mais l'ascenseur est devenu fou : il est descendu de trois étages, monté de cinq étages, descendu de quatre étages, monté d'un étage. Et tout cela trois fois de suite, avant de libérer Zahra !

Lorsqu'elle est sortie de l'ascenseur, était-elle à l'étage désiré ?



114 *Le compte est bon*

a. **19** : – 2 ; – 1 ; – 1 ; – 9

b. **145** : – 10 ; – 5 ; – 5 ; – 10

c. **76** : – 4 ; 100 ; 25 ; – 4

d. **- 74** : – 3 ; 10 ; 1 ; – 7

115 Vrai ou Faux

P.1. La somme et le produit de 3 nombres de même signe sont négatifs.

P.2. L'inverse de l'opposé d'un nombre est égal à l'opposé de l'inverse de ce nombre.

P.3. Soit n un nombre entier. Si un produit compte $2n + 1$ facteurs négatifs, alors il est négatif.

P.4. Si la somme de deux nombres est négative et si leur produit est positif, alors les deux nombres sont négatifs.

P.5. Le quotient de deux nombres opposés est égal à 1.

116 Recopie puis complète ces carrés magiques.

a. Pour l'addition.

	– 9	– 2
	– 4	
– 6		

b. Pour l'addition.

1,6		
	– 5,4	
– 4,4		– 12,4

c. Pour la multiplication.

	36	– 3
	6	
– 12		

d. Pour la multiplication.

	1	20
	– 10	
5		

117 TICE Géométrie Dynamique

a. Affiche les axes et la grille puis place les points suivants.

A(1 ; 1) ; B(1 ; 0) ; C(5 ; 0) et D(4 ; 1)

b. Place le point A' obtenu en multipliant par – 2 les coordonnées du point A. Place les points B', C' et D' obtenus de la même manière à partir des points B, C et D.

c. Que peux-tu dire des quadrilatères ABCD et A'B'C'D' ? (Tu pourras notamment comparer leur forme, leurs côtés, leur aire.)

d. Déplace les points A, B, C et D de manière à ce que l'aire du quadrilatère A'B'C'D' soit de 26 unités d'aire. Explique ta démarche.

118 Recopie et complète le tableau suivant.

a	b	c	$ab - c$	$-ac$	$(a-b) \div c$
2	− 3	5			
− 1	5	6			
− 3	− 7	− 4			
− 8	3	− 10			

119 TICE Tableur

- Choisir un nombre.
- Le multiplier par − 3.
- Ajouter 4 au nombre obtenu.
- Soustraire au résultat le carré du nombre choisi au départ.

a. Applique ce programme à 0, puis à 2.

b. Reproduis cette feuille de calcul dans un tableur. Quelles formules as-tu saisies en B2, B3, B4 et B5 ?

	A	B
1	Nombre de départ	
2	Multiplier par −3	
3	Ajouter 4	
4	Soustraire le carré du nombre de départ	
5	Résultat final	

c. On se demande s'il existe un nombre entier compris entre − 10 et 10, pour lequel le programme donne 0 comme résultat final. Utilise ta feuille de calcul pour répondre à cette question.

d. Existe-t-il un nombre entier relatif compris entre − 10 et 10, pour lequel le résultat final est supérieur à 6 ?

e. D'après toi, peut-on trouver un nombre relatif pour lequel le résultat final est supérieur à 6 ? Explique ta démarche.

120 ***Jonas, le retour !***

Jonas essaie de tenir ses comptes à jour : chaque semaine, il note dans un carnet toutes les sommes dépensées dans une colonne « dépenses », et tout l'argent gagné dans une colonne « recettes ». En fin de mois, il calcule le solde pour faire son bilan financier.

Mais ce mois-ci, il a commis deux erreurs ! Dans la colonne « dépenses », il a noté ses achats à la boulangerie (3,40 €), alors que c'est sa mère qui lui avait donné l'argent !

Par ailleurs, il a inscrit « 10 euros » dans la colonne « dépenses » le jour où ses grands-parents lui ont donné un billet !

Quel calcul permettrait à Jonas de rectifier le solde incorrect qu'il a obtenu ?

121 ***Magnitude absolue***

La magnitude apparente d'une étoile est un nombre qui mesure sa luminosité (son « éclat ») lorsqu'on l'observe depuis la Terre. Pour mesurer la luminosité d'une étoile indépendamment de sa distance à la Terre, on utilise la notion de magnitude absolue.

Si m désigne la magnitude apparente d'une étoile, alors sa magnitude absolue M se calcule par la formule **M = 5 + m − 5K** , où K est un nombre calculé à partir de la distance de l'étoile observée à la Terre.

M est alors un nombre relatif compris entre − 10 (pour une Supernova bleue très lumineuse) et 17 (pour une Naine rouge très peu lumineuse).

a. Calcule la magnitude absolue du Soleil, pour lequel m = − 26,7 et K = − 5,313.

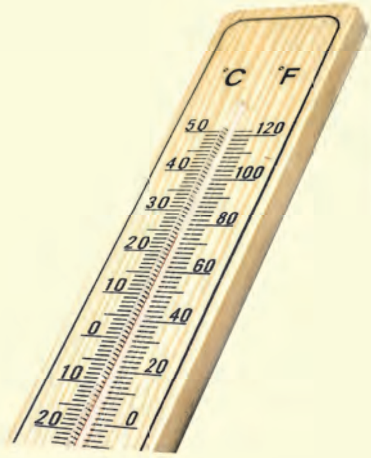
b. Deneb est une supergéante blanche très lumineuse : sa magnitude absolue est − 7,4 et sa magnitude apparente 1,3. Que vaut le nombre K pour cette étoile ?

Températures

Le degré Fahrenheit (symbole : °F) est une unité de mesure de la température, proposée par le physicien allemand Daniel Gabriel Fahrenheit en 1724. Cette unité est encore utilisée aujourd'hui, aux États-Unis notamment.

Doc.1 : Pour établir son échelle de températures, Fahrenheit a choisi deux températures de référence :

- une température basse, correspondant à 0°F. Pour la définir il a mesuré la température la plus froide du rude l'hiver 1708-1709 dans sa ville natale de Danzig ;
- une température haute, correspondant à 100°F, qu'il a fixée en mesurant celle du sang d'un cheval.



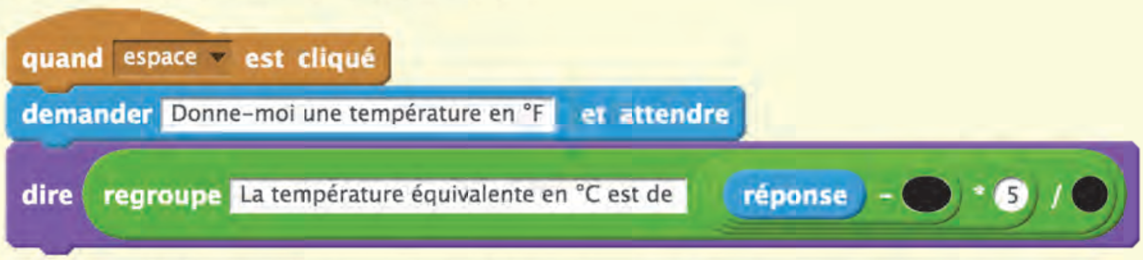
Doc.2 : Voici le programme de calcul pour convertir une mesure exprimée en degrés Fahrenheit en une mesure exprimée en degrés Celsius.

- Choisir une mesure de température en °F ;
- Soustraire 32 au nombre précédent ;
- Multiplier par 5 le résultat précédent ;
- Diviser par 9 le résultat précédent ;
- Le résultat obtenu est la mesure en °C de la température initiale.

a. À quelle mesure, en degrés Celsius, correspond la température haute ?

b. Quelle température, en degrés Celsius, a-t-il fait à Danzig au plus froid de l'hiver 1708-1709 ?

c. Ci-dessous, le programme SCRATCH demande une température, en degrés Fahrenheit, puis donne la température équivalente, en degrés Celsius.



Quels sont les nombres manquants dans les deux disques noirs ?

d. Utilise ce programme pour déterminer à quelle température, exprimée en °F, l'eau entre en ébullition.

e. À quelle température, exprimée en °F, l'eau gèle-t-elle ?

f. Écris un programme de calcul pour convertir une mesure exprimée en degrés Fahrenheit en une mesure exprimée en degrés Celsius.

g. Saisis alors un programme dans SCRATCH qui demande une température en degrés Celsius, puis donne la température équivalente en degrés Fahrenheit.

h. On appelle « zéro absolu » la température la plus basse qui puisse exister. Elle vaut − 273,15°C, et il n'est pas possible de l'atteindre (on peut juste s'en approcher). Que vaut, en degrés Fahrenheit, cette température limite ?

i. Trace un repère d'unité 1 cm pour 5°F en abscisse et 1 cm pour 5°C en ordonnée.
Place quelques points correspondants aux températures étudiées dans les questions précédentes.
Que dire de ces points ? Complète alors la représentation graphique.

j. Existe-t-il une température pour laquelle la mesure en °F est la même que celle en °C ?

N2

Fractions : comparaison et addition

Activités

1 Simplification de fractions

→ Cours : 1

a Quel est le signe de chacun des quotients suivants : $\frac{-8}{20}$; $\frac{8}{-20}$; $\frac{-8}{-20}$?

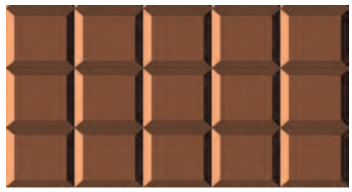
Simplifie la fraction $\frac{8}{20}$. Déduis-en une simplification de chacun des quotients précédents.

b Simplifie les quotients suivants : $\frac{-14}{21}$; $\frac{-30}{-42}$; $\frac{42}{-70}$.

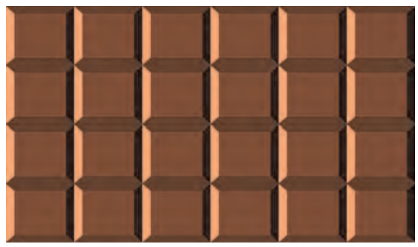
2 Comparaison de fractions

→ Cours : 2

Lucien adore le chocolat, il en rêve toutes les nuits !



a Il y a deux jours, il rêve que sa mère l'autorise à manger une partie de la plaque ci-contre, pas encore entamée. Il peut choisir entre les $\frac{2}{3}$ et les $\frac{3}{5}$ de la plaque. Que va-t-il faire et pourquoi ?



b La nuit dernière, il rêve d'une autre plaque, semblable à celle représentée ci-contre. Cette fois-ci, sa mère lui donne le choix entre les $\frac{5}{6}$ et les $\frac{7}{8}$ de la plaque. Quelle fraction va-t-il choisir et pourquoi ?

c Reprends la question précédente avec $\frac{25}{28}$ et $\frac{7}{8}$. À toi de choisir la plaque de chocolat adéquate.

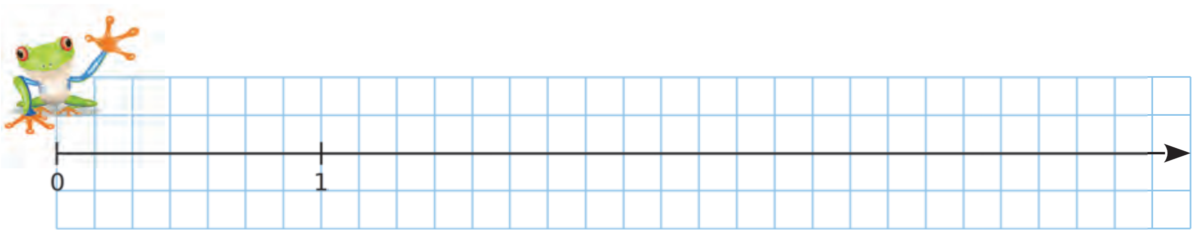
d Essaie alors d'énoncer une règle pour comparer deux fractions.

3 Somme de fractions

→ Cours : 3

Trois grenouilles participent à une épreuve d'athlétisme : le double saut. Voici les performances de Froggy, Ranita et Anoura. Indique la fraction de mètre que chaque grenouille a sautée au total. Tu pourras t'aider d'une droite graduée.

a Froggy a sauté $\frac{6}{7}$ de mètre, puis $\frac{9}{7}$ de mètre.



b Ranita a sauté $\frac{5}{7}$ de mètre, puis $\frac{11}{14}$ de mètre.

c Anoura a sauté $\frac{8}{7}$ de mètre, puis $\frac{1}{2}$ de mètre.

d Essaie alors d'énoncer une règle pour additionner deux fractions.

1 Égalité de quotients

→ 18

A Quotients égaux

Propriétés

- Un quotient de deux nombres relatifs ne change pas quand on **multiplie** le numérateur et le dénominateur par un **même nombre relatif non nul.**
- Un quotient de deux nombres relatifs ne change pas quand on **divise** son numérateur et son dénominateur par un **même nombre non nul**.
- Soient a, b et k des nombres avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$: $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$.

Exemples :

$A = \frac{-14}{21} = \frac{-2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{-2}{3}$ $B = \frac{-45}{-35} = \frac{9 \times (-5)}{7 \times (-5)} = \frac{9}{7}$ $C = \frac{15}{-7} = \frac{15 \times (-1)}{(-7) \times (-1)} = \frac{-15}{7} = -\frac{15}{7}$

B Réduction au même dénominateur

Définition **Réduire deux quotients au même dénominateur,** c'est déterminer des quotients égaux à chacun de ces quotients, ayant le même dénominateur.

Exemple 1 : $\frac{9}{5}$ et $\frac{2}{15}$

Les dénominateurs 15 et 5 sont multiples l'un de l'autre, donc le plus petit multiple commun à 5 et 15 est **15,** et on a : $\frac{9}{5} = \frac{9 \times 3}{5 \times 3} = \frac{27}{15}$ et $\frac{2}{15}$.

Exemple 2 : $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$

Les dénominateurs 7 et 8 n'ont aucun diviseur commun autre que 1, donc le plus petit multiple commun est $7 \times 8 =$ **56,** et on a :
$\frac{2}{7} = \frac{2 \times 8}{7 \times 8} = \frac{16}{56}$ et $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 7}{8 \times 7} = \frac{21}{56}$.

Exemple 3 : $\frac{2}{9}$ et $\frac{5}{12}$

On cherche le plus petit multiple commun non nul aux dénominateurs 9 et 12.

Multiples de 9 : 0, 9, 18, 27, **36**, 45, 54,...

Multiples de 12 : 0, 12, 24, **36**, 48, 60,...

Le plus petit multiple commun à 9 et 12 est **36,** et on a :
$\frac{2}{9} = \frac{2 \times 4}{9 \times 4} = \frac{8}{36}$ et $\frac{5}{12} = \frac{5 \times 3}{12 \times 3} = \frac{15}{36}$

2 Comparaison de deux fractions

→ 32

A Fractions de même dénominateur

Propriété Deux nombres en écriture fractionnaire **de même dénominateur** positif sont rangés dans le même ordre que leur numérateur.

Exemple : On veut comparer $\frac{-9}{10}$ et $\frac{7}{-10}$.

$\frac{7}{-10} = \frac{-7}{10}$ donc il suffit de comparer les fractions $\frac{-9}{10}$ et $\frac{-7}{10}$.

Comme $-9 < -7$, on en déduit que $\frac{-9}{10} < \frac{-7}{10}$ et donc que $\frac{-9}{10} < \frac{7}{-10}$.

B Fractions de dénominateurs différents

Propriété Pour comparer deux nombres en écriture fractionnaire **de numérateurs différents**, on les réduit au même dénominateur, puis on applique la propriété précédente.

Exemple 1 :

On veut comparer les nombres $\frac{1,2}{4}$ et $\frac{5,7}{20}$.

On réduit les deux nombres en écriture fractionnaire au même dénominateur.
Comme 20 est un multiple de 4, le plus petit dénominateur commun est 20.

$\frac{1,2}{4} = \frac{1,2 \times \mathbf{5}}{4 \times \mathbf{5}} = \frac{6}{20}$ et $\frac{5,7}{20}$

$6 > 5,7$

d'où $\frac{6}{20} > \frac{5,7}{20}$

Donc $\frac{1,2}{4} > \frac{5,7}{20}$

Exemple 2 :

On veut comparer les nombres $\frac{-5}{7}$ et $\frac{-8}{11}$.

On réduit les deux fractions au même dénominateur. Comme 7 et 11 n'ont pas de diviseur commun, le plus petit multiple commun à ces deux nombres est leur produit $7 \times 11 = 77$.

$\frac{-5}{7} = \frac{-5 \times \mathbf{11}}{7 \times \mathbf{11}} = \frac{-55}{77}$ et $\frac{-8}{11} = \frac{-8 \times \mathbf{7}}{11 \times \mathbf{7}} = \frac{-56}{77}$

$-55 > -56$

d'où $\frac{-55}{77} > \frac{-56}{77}$

Donc $\frac{-5}{7} > \frac{-8}{11}$

3 Addition et soustraction

→ 43 70

A Fractions de même dénominateur

Propriété Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur, il suffit d'additionner (ou de soustraire) les numérateurs, et on garde le dénominateur commun.

Pour tous nombres a, b et c où c est non nul : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Exemples :

$A = \frac{7}{\mathbf{5}} + \frac{6,1}{\mathbf{5}} = \frac{7+6,1}{\mathbf{5}} = \frac{13,1}{\mathbf{5}}$ et $B = \frac{19}{\mathbf{8}} - \frac{5}{\mathbf{8}} = \frac{19-5}{\mathbf{8}} = \frac{14}{\mathbf{8}} = \frac{7}{\mathbf{4}}$

B Fractions de dénominateurs différents

Propriété Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents, on commence par les réduire au même dénominateur, puis on applique la propriété précédente.

Exemple 1 :

$C = \frac{7}{3} + \frac{6}{12}$

$C = \frac{7 \times \mathbf{4}}{3 \times \mathbf{4}} + \frac{6}{12}$

$C = \frac{28}{12} + \frac{6}{12}$

$C = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$

Exemple 2 :

$D = \frac{6}{5} - \frac{7}{3}$

$D = \frac{6 \times \mathbf{3}}{5 \times \mathbf{3}} - \frac{7 \times \mathbf{5}}{3 \times \mathbf{5}}$

$D = \frac{18}{15} - \frac{35}{15}$

$D = \frac{-17}{15}$

Exemple 3 :

$E = -1 + \frac{13}{30} - \frac{-11}{12}$

$E = \frac{-1 \times \mathbf{60}}{1 \times \mathbf{60}} + \frac{13 \times \mathbf{2}}{30 \times \mathbf{2}} + \frac{11 \times \mathbf{5}}{12 \times \mathbf{5}}$

$E = \frac{-60}{60} + \frac{26}{60} + \frac{55}{60}$

$E = \frac{21}{60} = \frac{7 \times \mathbf{3}}{20 \times \mathbf{3}} = \frac{7}{20}$

À l'oral !

1 Quels nombres sont négatifs ?

$-\dfrac{5{,}1}{1{,}18}$; $\dfrac{-3}{15}$; $\dfrac{45}{-7}$; $\dfrac{36}{11}$; $\dfrac{-17}{-49}$; $-\dfrac{1}{-3}$

2 Identifie les groupes de nombres égaux.

$\dfrac{2}{-5}$; $-\dfrac{5}{-2}$; $-2{,}5$; $-\dfrac{-4}{-10}$; $\dfrac{25}{10}$; $-\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{10}{-4}$

3 210 peut-il être un dénominateur commun aux fractions $\dfrac{25}{42}$ et $\dfrac{2}{105}$?

4 Trouve le plus petit multiple commun aux nombres 10 et 8.
Même question avec 6 et 21.

5 Réduis les deux fractions suivantes au même dénominateur : $\dfrac{-3}{4}$ et $\dfrac{4}{-5}$.

6 Calcule.

a. $\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{7}$ **b.** $\dfrac{3}{8}-\dfrac{2}{8}$

c. $\dfrac{3}{11}+\dfrac{9}{11}$ **d.** $\dfrac{7}{5}-\dfrac{1}{5}$

e. $\dfrac{0{,}5}{3}+\dfrac{2}{3}$ **f.** $\dfrac{5}{9}-\dfrac{4{,}5}{9}$

7 Réduis les paires de fractions suivantes au même dénominateur.

a. $\dfrac{2}{7}$ et $\dfrac{5}{14}$ **b.** $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{11}{10}$

c. $\dfrac{1}{8}$ et $\dfrac{5}{64}$ **d.** 7 et $\dfrac{11}{3}$

8 Calcule puis simplifie si nécessaire.

a. $\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{3}$ **b.** $\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{20}$

c. $3+\dfrac{2}{11}$ **d.** $\dfrac{13}{2}-5$

9 Calcule puis simplifie si nécessaire.

a. $-\dfrac{3}{11}+\dfrac{8}{11}$ **b.** $\dfrac{7}{5}-\dfrac{12}{5}$

c. $\dfrac{-7}{5}-\dfrac{-7}{5}$ **d.** $\dfrac{-1}{9}-\dfrac{4{,}5}{9}$

10 Calcule puis simplifie si nécessaire.

a. $\dfrac{-3}{16}+\dfrac{5}{4}$ **b.** $\dfrac{-1}{27}-\dfrac{-2}{3}$

c. $3-\dfrac{25}{4}$ **d.** $\dfrac{-11}{7}-1$

11 Calcule puis simplifie si nécessaire.

a. $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}$ **b.** $\dfrac{7}{4}-\dfrac{4}{7}$

c. $-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{5}$ **d.** $\dfrac{1}{7}-\dfrac{5}{11}$

12 Complète les pointillés et explique ta démarche.

$\dfrac{2}{7}-\dfrac{\dots}{14}=\dfrac{5}{7}$

13 **Vrai ou Faux**

P.1. $\dfrac{7}{-5}=-\dfrac{5}{7}$

P.2. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{7}$

P.3. L'opposé de $-\dfrac{3}{-5}$ est $-\dfrac{3}{5}$.

P.4. $2-\dfrac{17}{4}=-\dfrac{9}{4}$

P.5. Pour toute fraction, je peux trouver une fraction égale de dénominateur négatif.

Égalité de quotients

14 QCM

a. $-\frac{5}{-7} =$

R.1	R.2	R.3
$\frac{5}{7}$	$\frac{-5}{7}$	$-\frac{-5}{-7}$

b. L'écriture simplifiée de $\frac{36}{-42}$ est...

R.1	R.2	R.3
$-\frac{6}{6}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{6}{7}$

c. $\frac{-4}{9} =$

R.1	R.2	R.3
$\frac{-24}{56}$	$\frac{-16}{36}$	$\frac{-44}{94}$

15 Indique les nombres positifs et négatifs.

$\frac{-5,2}{4,23}$; $\frac{5}{-2,1}$; $\frac{472}{23}$; $\frac{-8,9}{-45}$; $-\frac{12}{13}$; $-\frac{11}{-5,2}$

16 Quels nombres sont égaux ?

$\frac{-8}{9}$; $-\frac{8}{9}$; $\frac{-8}{-9}$; $-\frac{8}{-9}$; $\frac{8}{-9}$; $-\frac{-8}{9}$; $\frac{8}{9}$

17 Réécris chaque quotient ci-dessous avec un dénominateur entier positif.

$\frac{4}{-5}$; $\frac{-8}{-7}$; $-\frac{5,2}{-7}$; $\frac{7}{-2,1}$; $\frac{8,2}{0,12}$; $-\frac{-1}{-3,54}$

18 Recopie et complète.

a. $\frac{2}{3} = \frac{...}{27}$

b. $\frac{11}{8} = \frac{...}{40}$

c. $\frac{4}{7} = \frac{...}{42}$

d. $\frac{9}{10} = \frac{...}{90}$

19 Recopie et complète.

a. $-6 = \frac{...}{4}$

b. $\frac{3}{-5} = \frac{...}{15}$

c. $\frac{-1}{9} = \frac{-7}{...}$

d. $\frac{-14}{-13} = \frac{...}{65}$

20 Sandrine compare les étiquettes de deux paquets de biscuits. Le premier, d'un poids de 125 g, contient 65,5 g de farine. Le second, d'un poids de 220 g, contient 115 g de farine. La proportion de farine est-elle la même dans les deux paquets ? Si non, y a-t-il un gros écart ?

21 Simplifie chaque fraction au maximum.

a. $\frac{15}{25}$ | **b.** $\frac{90}{60}$ | **c.** $\frac{63}{81}$ | **d.** $\frac{132}{144}$

22 Simplifie chaque fraction au maximum.

a. $-\frac{-35}{-42}$ | **b.** $\frac{78}{-52}$ | **c.** $\frac{-81}{-18}$ | **d.** $\frac{-12}{100}$

23 Pour choisir un écran de télévision, d'ordinateur ou une tablette tactile, on peut s'intéresser à son format, soit le rapport : $\frac{\text{longueur de l'écran}}{\text{largeur de l'écran}}$.

Le format des écrans ci-dessous est-il $\frac{4}{3}$ ou $\frac{16}{9}$?

a. Un écran de télévision ayant une longueur de 80 cm et une largeur de 45 cm.

b. Une tablette tactile ayant une longueur de 180 mm et une largeur de 135 mm.

c. Un écran d'ordinateur ayant une longueur de 352 mm et une largeur de 198 mm.

24 ***Multiple commun***

a. Quels sont les dix premiers multiples de 12 ? Ceux de 18 ? Déduis-en le plus petit multiple non nul commun de 12 et 18, puis un dénominateur commun positif des fractions : $\frac{-7}{12}$ et $\frac{-11}{18}$.

Ces fractions sont-elles égales ?

b. La méthode précédente permet-elle de trouver rapidement un dénominateur commun aux nombres : $\frac{8}{11}$ et $\frac{10}{13}$?

Comment alors en trouver un rapidement ?

Comparaison

25 Soient $a = \frac{816}{577}$ et $b = \frac{577}{408}$.

a. Donne la valeur arrondie de a et b au millième. Peux-tu en déduire la comparaison de a et b ?

b. Donne des valeurs approchées de a et b qui permettent de les comparer puis compare-les.

26 Compare les nombres suivants.

a. $\frac{-12}{13}$ et $\frac{5}{13}$

b. $\frac{-7}{3}$ et $\frac{-11}{3}$

c. $-\frac{23}{11}$ et $\frac{13}{-11}$

d. $\frac{-17}{-24}$ et $\frac{1}{24}$

27 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{-7,5}{3}$ et $\frac{-7,49}{3}$

b. $\frac{4,05}{2,1}$ et $\frac{4,2}{2,1}$

c. $-\frac{0,74}{5}$ et $\frac{-0,739}{5}$

d. $\frac{8}{-5,23}$ et $\frac{-7,9}{5,23}$

28 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{3,5}{8,2}$ et $\frac{3,5}{8,15}$

b. $-\frac{-1}{6}$ et $\frac{1}{5,7}$

29 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{1}{-5}$ et $\frac{1}{-7}$

b. $\frac{-3}{8}$ et $\frac{-3}{8,2}$

c. $-\frac{5,23}{14,5}$ et $\frac{-5,23}{14,6}$

d. $\frac{-7,5}{0,23}$ et $\frac{75}{-2,4}$

30 Dans chaque cas ci-dessous, réécris les nombres avec le même dénominateur positif, puis compare-les.

a. $\frac{-5}{4}$ et $\frac{-9}{8}$

b. $\frac{2,7}{-9}$ et $\frac{-1}{3}$

c. 3 et $-\frac{20,9}{-7}$

d. $-\frac{2}{11}$ et $\frac{-5}{33}$

e. $\frac{7}{2,5}$ et $\frac{20,5}{7,5}$

f. $\frac{13}{-27}$ et $\frac{-79}{162}$

31 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{6}{7}$ et $\frac{7}{8}$

b. $\frac{5}{11}$ et $\frac{4}{9}$

c. $\frac{1,5}{7}$ et $\frac{0,5}{4}$

d. $\frac{11}{100}$ et $\frac{2}{15}$

32 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{-5}{8}$ et $\frac{-3,8}{6}$

b. $\frac{14}{5}$ et $\frac{20}{7}$

c. $\frac{3}{-50}$ et $-\frac{4}{75}$

d. $\frac{54,5}{0,27}$ et $\frac{-2,62}{-0,13}$

33 Compare en justifiant.

a. $-\frac{12}{18}$ et $\frac{399}{-300}$

b. $\frac{2}{57}$ et $\frac{1}{28,4}$

c. $\frac{-75}{11}$ et $\frac{31}{-15}$

d. $\frac{-5}{6}$ et $-\frac{15}{14}$

e. $\frac{6}{13}$ et $\frac{29}{65}$

f. $\frac{3}{-22}$ et $\frac{4,5}{33}$

34 ***Dans l'ordre***

a. Range ces nombres dans l'ordre croissant, sans utiliser de valeurs approchées.

$$\frac{7}{-15} \; ; \; \frac{7}{3} \; ; \; \frac{490}{420} \; ; \; \frac{-5}{12} \; ; \; \frac{-24}{-18} \; ; \; 2,5$$

b. Range ces nombres dans l'ordre décroissant.

$$\frac{-29}{100} \; ; \; \frac{7}{-25} \; ; -0,285 \; ; \; -\frac{1}{5} \; ; \; \frac{13}{-50} \; ; 0 \; ; \; \frac{-1}{2,5}$$

35 Quatre amis font un voyage de trois jours. Le premier jour, ils parcourent 40 % du trajet total ; le deuxième jour, un quart et le dernier jour, $\frac{7}{20}$ du trajet total.

a. Quel jour ont-ils parcouru la plus grande distance ?

b. Peux-tu calculer la distance parcourue chaque jour ?

36 La part des énergies renouvelables en France est passée de 9,1 % en 2005 à environ $\frac{1}{7}$ en 2014. Cette part a-t-elle augmenté ou diminué ?

Addition et soustraction

37 QCM

a. $\frac{7}{9} - \frac{4}{9} =$

R.1	R.2	R.3
0	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{18}$

b. $\frac{3}{14}$ est le résultat de...

R.1	R.2	R.3
$\frac{2}{7} + \frac{1}{7}$	$\frac{1}{14} + \frac{2}{7}$	$\frac{1}{14} + \frac{1}{7}$

c. $\frac{13}{11} - 1 =$

R.1	R.2	R.3
$\frac{12}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{13}{10}$

38 Effectue les opérations suivantes et donne le résultat sous forme simplifiée.

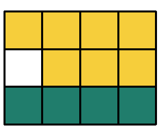
a. $\frac{7}{9} + \frac{5}{9}$ **b.** $\frac{19}{8} - \frac{15}{8}$ **c.** $\frac{5}{12} + \frac{13}{12}$ **d.** $\frac{9}{11} + \frac{7}{11}$ **e.** $\frac{7}{18} + \frac{11}{18}$ **f.** $\frac{27}{13} - \frac{1}{13}$

39 Calcule.

a. $\frac{7{,}3}{7} + \frac{2{,}7}{7}$ **b.** $\frac{12}{4{,}1} + \frac{6}{4{,}1}$ **c.** $\frac{8{,}1}{3{,}05} + \frac{1}{3{,}05}$ **d.** $\frac{8{,}1}{22} - \frac{2{,}1}{22}$ **e.** $\frac{19}{0{,}8} - \frac{12}{0{,}8}$ **f.** $\frac{7{,}3}{5{,}5} - \frac{0{,}3}{5{,}5}$

40 ***Somme de fractions***

a. L'égalité $\frac{1}{3} + \frac{7}{12} = \frac{11}{12}$ est illustrée par la figure ci-contre. Explique pourquoi.



b. En t'inspirant de la question **a**, écris une égalité illustrant chacune des figures suivantes.

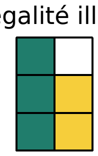


Figure 1

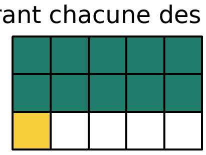


Figure 2

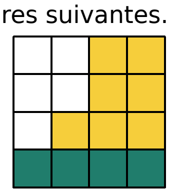


Figure 3

41 ***Par étapes !***

a. Recopie et complète : $\frac{3}{7} = \frac{...}{49}$.

b. Calcule : $\frac{3}{7} + \frac{5}{49}$.

42 Effectue les opérations suivantes.

a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ **b.** $\frac{5}{6} + \frac{5}{12}$ **c.** $\frac{13}{14} + \frac{5}{7}$ **d.** $\frac{3}{4} + \frac{5}{24}$ **e.** $\frac{6}{7} + \frac{2}{35}$ **f.** $\frac{11}{81} + \frac{1}{9}$

43 Effectue les opérations suivantes.

a. $\frac{7}{4} + \frac{1}{8}$ **b.** $\frac{1}{2} + \frac{3}{26}$ **c.** $\frac{8}{4} + \frac{4}{8}$ **d.** $\frac{13}{7} + \frac{13}{21}$ **e.** $\frac{1}{11} + \frac{2}{33}$ **f.** $\frac{7}{10} + \frac{9}{2}$

44 Effectue les opérations suivantes.

a. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ **c.** $\frac{9}{4} - \frac{5}{12}$ **d.** $\frac{5}{6} - \frac{3}{48}$ **e.** $\frac{3}{5} - \frac{1}{25}$ **f.** $\frac{9}{7} - \frac{20}{21}$

45 Effectue les opérations suivantes.

a. $\frac{15}{16} - \frac{1}{2}$ **b.** $\frac{15}{26} + \frac{7}{13}$ **c.** $\frac{17}{5} - \frac{4}{35}$ **d.** $\frac{33}{10} - \frac{11}{5}$ **e.** $\frac{9}{7} + \frac{64}{63}$ **f.** $\frac{19}{99} + \frac{1}{11}$

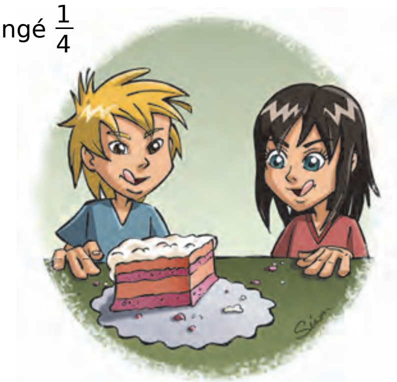
46 Effectue les opérations suivantes.

a. $\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{8}$ **b.** $\frac{1}{3} + \frac{5}{27} + \frac{10}{9}$ **c.** $\frac{1}{5} + \frac{3}{20} - \frac{1}{4}$ **d.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24}$

47 Jimmy a mangé $\frac{1}{4}$ d'un gâteau.
Élise a mangé $\frac{3}{8}$ du même gâteau.

a. Quelle part du gâteau ont-ils mangée à eux deux ?

b. Quelle part du gâteau reste-t-il ?



48 Effectue les opérations suivantes.

a. $4 + \frac{3}{2}$ **b.** $2 + \frac{1}{3}$ **c.** $7 + \frac{1}{4}$ **d.** $\frac{16}{5} + 3$ **e.** $6 + \frac{5}{3}$ **f.** $2 + \frac{3}{7}$

49 Effectue les opérations suivantes.

a. $\frac{9}{4} - 2$ **b.** $\frac{14}{11} - 1$ **c.** $7 - \frac{5}{9}$ **d.** $3 - \frac{9}{5}$ **e.** $\frac{30}{13} - 2$ **f.** $1 - \frac{1}{7}$

50 Recopie et complète.

a. $\frac{9}{7} + \frac{...}{...} = \frac{17}{7}$

b. $\frac{...}{...} + \frac{3}{5} = \frac{23}{15}$

c. $\frac{3}{4} + \frac{...}{...} = \frac{23}{24}$

d. $\frac{9}{7} - \frac{...}{...} = \frac{1}{7}$

e. $\frac{5}{8} - \frac{...}{...} = \frac{3}{40}$

f. $\frac{14}{4} \ ... \ \frac{5}{2} = 1$

51 ***Étonnant !***

a. Calcule : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. **b.** Calcule : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

c. Calcule : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$.

d. Sans calculer, essaie de deviner la valeur de $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$, puis vérifie.

52 Dans chaque cas, calcule $r + s - t$.

a. $r = \frac{1}{2}$; $s = \frac{3}{4}$; $t = \frac{1}{4}$

b. $r = \frac{7}{6}$; $s = \frac{10}{3}$; $t = \frac{5}{6}$

c. $r = \frac{1}{3}$; $s = \frac{1}{9}$; $t = \frac{1}{27}$

d. $r = \frac{2}{5}$; $s = \frac{13}{15}$; $t = \frac{2}{5}$

e. $r = \frac{13}{18}$; $s = \frac{19}{6}$; $t = \frac{4}{3}$

53 ***Histoire d'heures***

a. Exprime la durée « 43 min » sous forme d'une fraction d'heure, avec 60 pour dénominateur.

b. Procède de la même façon pour 1 h 12 min, et pour 2 h 05 min.

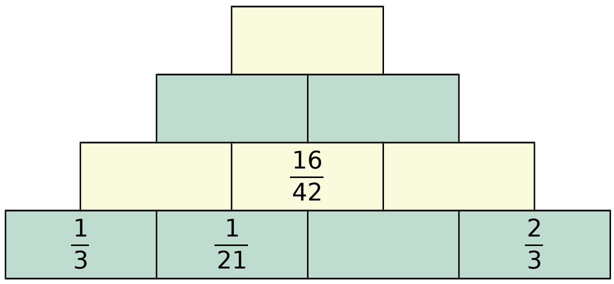
c. Additionne les trois fractions ainsi obtenues.

54 Trois frères veulent acheter ensemble un jeu vidéo. Le premier possède les $\frac{3}{5}$ du prix de ce jeu vidéo, le deuxième $\frac{4}{15}$ et le troisième $\frac{1}{3}$.

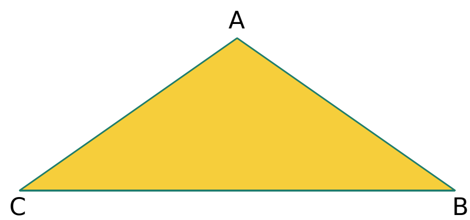
a. À eux trois ont-ils assez d'argent ?

b. Peuvent-ils acheter un second jeu au même prix ?

55 Recopie puis complète la pyramide suivante, sachant que le nombre contenu dans une case est la somme des nombres contenus dans les deux cases situées en dessous de lui.



56 ABC est un triangle isocèle en A.

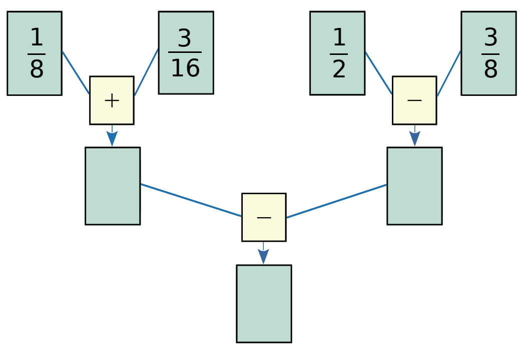


a. Sachant que AB = $\frac{5}{7}$ BC, quelle fraction de BC représente le périmètre du triangle ABC ?

b. Même question, sachant que AB = $\frac{7}{5}$ BC.

57 ***Calculs en série***

a. Recopie et complète le diagramme suivant.



b. Écris, sur une seule ligne, l'expression mathématique correspondant à ce calcul.

58 QCM

a. $\frac{-3}{5} + \frac{1}{5} =$

R.1	R.2	R.3
$\frac{-4}{5}$	$\frac{-4}{10}$	$\frac{-2}{5}$

b. $-3 - \frac{2}{7} =$

R.1	R.2	R.3
$\frac{-5}{7}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{-23}{7}$

c. $\frac{-2}{21}$ est le résultat de...

R.1	R.2	R.3
$\frac{-5}{21} + \frac{1}{7}$	$\frac{-4}{13} + \frac{2}{8}$	$\frac{-1}{21} + \frac{1}{21}$

59 Calcule.

a. $\frac{-5}{3} + \frac{-6}{3}$

b. $-\frac{7}{15} - \frac{7}{15}$

c. $\frac{-5}{14} - \frac{-2}{14}$

d. $\frac{1}{8} - \frac{9}{8}$

60 Calcule.

a. $\frac{-5{,}2}{41} + \frac{2{,}2}{41}$

b. $\frac{-5}{2{,}1} + \frac{-1}{2{,}1}$

c. $\frac{-3{,}5}{1{,}9} + \frac{2{,}5}{1{,}9}$

d. $\frac{-0{,}1}{99} + \frac{0{,}1}{99}$

61 Calcule.

a. $\frac{8}{-5} + \frac{7}{5}$

b. $\frac{-4}{-15} + \frac{1}{-15}$

c. $\frac{5}{6} - \frac{7}{-6}$

d. $\frac{-9}{17} + \frac{1}{-17}$

62 Calcule.

a. $\frac{5}{12} + \frac{11}{12} - \frac{7}{12}$

b. $-\frac{1}{25} - \frac{-11}{25} + \frac{-8}{25}$

c. $\frac{3}{3{,}4} - \frac{7}{3{,}4} - \frac{7}{3{,}4}$

d. $-\frac{1{,}5}{3{,}5} - \frac{2{,}5}{3{,}5} + \frac{-4}{3{,}5}$

63 Écris chaque nombre sous la forme $\frac{a}{30}$, où a est un nombre décimal relatif.

$\frac{3}{10}$; $\frac{1}{-3}$; -2 ; $\frac{2{,}1}{0{,}6}$; $\frac{-18}{90}$; $\frac{1}{-60}$

64 ***Par étapes !***

a. Recopie et complète : $\frac{4}{-5} = -\frac{\dots}{35}$.

b. Calcule : $\frac{4}{-5} + \frac{3}{35}$.

c. Calcule : $\frac{4}{-5} - \frac{3}{35}$.

65 Calcule en détaillant les étapes.

a. $\frac{5}{6} + \frac{-1}{3}$

b. $\frac{7}{9} - \frac{1}{-27}$

c. $-\frac{8}{5} + \frac{23}{50}$

d. $\frac{45}{15} - \frac{7}{3}$

66 Calcule en détaillant les étapes.

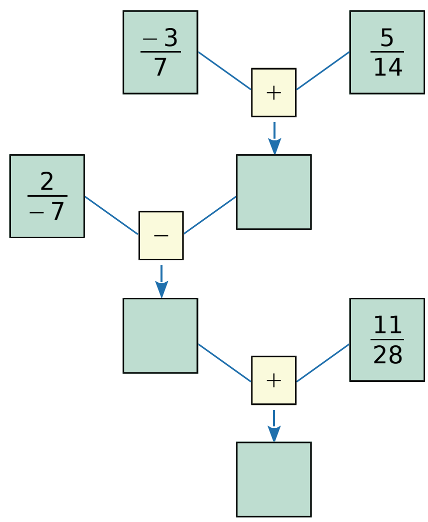
a. $\frac{4}{11} - 2$

b. $-3 + \frac{-1}{7}$

c. $\frac{-5}{2} - 7$

d. $4 - \frac{5}{-11}$

67 ***Calculs en série***



a. Recopie et complète le diagramme ci-dessus.

b. Écris, sur une seule ligne, l'expression mathématique correspondant à ce calcul.

68 On considère les points suivants sur un axe gradué : A $\left(\frac{-5}{72}\right)$; B $\left(\frac{7}{36}\right)$; C $\left(\frac{-11}{18}\right)$ et D $\left(\frac{10}{9}\right)$.

a. Calcule les distances suivantes.

- AD
- AC
- AB
- BD

b. Vérifie que AB + BD = AD.

69 QCM

a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

R.1	R.2	R.3
$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$

b. $\frac{-3}{7} + \frac{1}{6} =$

R.1	R.2	R.3
$\frac{-2}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{-11}{42}$

c. $\frac{1}{4} - \frac{-4}{5} =$

R.1	R.2	R.3
$\frac{21}{20}$	$\frac{-11}{20}$	$\frac{5}{9}$

70 ***Par étapes !***

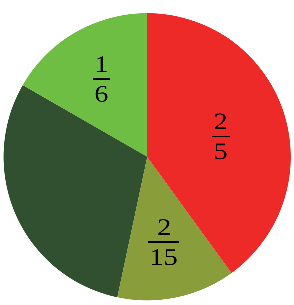
a. Recopie et complète : $\frac{5}{12} = \frac{\dots}{60}$ et $\frac{7}{20} = \frac{\dots}{60}$.

b. Calcule : $\frac{5}{12} + \frac{7}{20}$.

c. Calcule : $\frac{5}{12} - \frac{7}{20}$.

71 Pour réaliser un cocktail *Culola*, on utilise du citron vert, de l'avocat mixé, du jus d'olive et du jus de tomate, dans les proportions représentées ci-après.

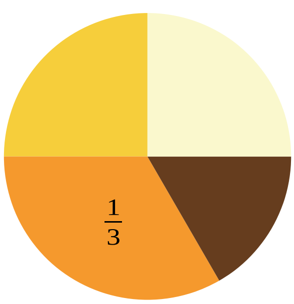
Quelle est la proportion d'avocat mixé ?



- citron vert
- avocat mixé
- jus d'olive
- jus de tomate

72 Pour réaliser un cocktail *Coconut*, on utilise du jus d'ananas, du jus d'orange, du sirop de noix de coco et de la crème fraiche, dans les proportions représentées ci-après.

Quelle est la proportion de sirop de noix de coco ?



- jus d'ananas
- jus d'orange
- sirop de noix de coco
- crème fraiche

73 Calcule en détaillant les étapes.

a. $\frac{-7}{50} + \frac{2}{75}$

b. $\frac{1}{5} + \frac{-2}{3}$

c. $\frac{1}{12} - \frac{1}{9}$

d. $\frac{4}{18} + \frac{5}{27}$

74 Calcule en détaillant les étapes.

a. $\frac{17}{-24} + \left(-\frac{5}{36}\right)$

b. $\frac{3}{16} - \frac{-1}{12}$

c. $\frac{8}{-17} - \left(-\frac{1}{15}\right)$

d. $\frac{2}{5} + \frac{-2}{15} - \frac{7}{12}$

75 Calcule en détaillant les étapes.

a. $\frac{9}{-55} - \frac{-7}{44}$

b. $\frac{-9}{-18} - \frac{5}{30} + \left(-\frac{9}{6}\right)$

c. $\frac{1}{15} + \left(-\frac{1}{18}\right)$

d. $\frac{3}{-7} + \frac{2}{5} - \frac{4}{3}$

76 Calcule en détaillant les étapes.

a. $\frac{42}{75} - \left(-\frac{22}{30}\right)$

b. $\frac{85}{4} + \frac{25}{-5}$

c. $\frac{-12}{25} - 8$

d. $-\frac{14}{27} + \frac{-5}{108}$

77 Après de longues négociations, il a été convenu que Léa hériterait de deux quinzièmes de la fortune de son oncle du bout du monde ; Florian, d'un neuvième de cette fortune ; Jean et Justine se partageraient équitablement le reste.

a. Fais un schéma à l'aide d'un diagramme circulaire.

b. Quelles seront les parts respectives de Jean et Justine ?

78 On donne : $a = \frac{-8}{28}$; $b = \frac{1}{35}$ et $c = \frac{45}{-21}$.

a. Calcule $a - b + c$ et $b - a - c$.

b. Que remarques-tu ?

79 ***Suite de calculs***

a. Calcule : $1 - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$.

Que remarques-tu ?

b. Calcule alors la somme suivante.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

80 **Vrai ou Faux**

P.1. Une fraction est toujours supérieure à son opposé.

P.2. La différence de 1 et $\frac{3}{4}$ est égale à la différence de 3 et $\frac{1}{4}$.

P.3. La somme de n fractions de numérateur 1 et de dénominateur n est égale à 1.

P.4. La moitié de $\frac{1}{a}$ est $\frac{1}{2a}$.

81 ***Comptes de Marseillais...***

Voici un extrait de MARIUS, une œuvre de Marcel Pagnol (Acte II).

> CÉSAR. – ...Eh bien, pour la dixième fois, je vais t'expliquer, le picon-citron-curaçao. Approche-toi ! Tu mets d'abord un tiers de curaçao. Fais attention : un tout petit tiers. Bon. Maintenant, un tiers de citron. Un peu plus gros. Bon. Ensuite, un bon tiers de Picon. Regarde la couleur. Regarde comme c'est joli. Et à la fin un grand tiers d'eau. Voilà.
> MARIUS. – Et ça fait quatre tiers.
> CÉSAR. – Exactement. J'espère que cette fois, tu as compris.
> MARIUS. – Dans un verre, il n'y a que trois tiers.
> CÉSAR. – Mais imbécile, ça dépend de la grosseur des tiers !...
> MARIUS. – Eh non, ça ne dépend pas. Même dans un arrosoir, on ne peut mettre que trois tiers.
> CÉSAR, *triomphal.* – Alors, explique-moi comment j'en ai mis quatre dans ce verre !

a. Que penses-tu de cette scène ? Comment expliques-tu la réaction de Marius ?

b. Pourquoi est-il indiqué « CÉSAR, *triomphal.* » à la fin du texte ?

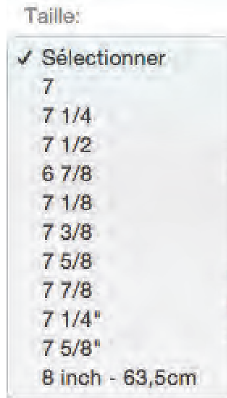
82 À son retour d'Australie, Anne-Cécile rend visite à ses amis. À chaque fois, ils lui offrent un morceau de son gâteau préféré.
Le premier jour, elle fait la gourmande et mange un demi-gâteau chez Sophie.
Le lendemain, Marie lui offre un quart de gâteau.
Le troisième jour, plus raisonnable, elle ne mange qu'un huitième du gâteau de Mathieu.
Le quatrième jour, elle ne prend qu'un seizième du gâteau de Franck.
Le cinquième jour, elle veut juste faire plaisir à Hafid : elle avale un trente-deuxième de son gâteau.

a. Quelle proportion de gâteau a-t-elle mangée en cinq jours ?

b. En continuant ainsi, parviendra-t-elle à manger un gâteau entier ?

83 Sur son site Web, un vendeur de casquettes a classé ses modèles selon leur taille en pouces (inch).

Range les casquettes dans l'ordre croissant de leur taille.



84 **TICE Tableur**

a. Reproduis la feuille de tableur ci-dessous.

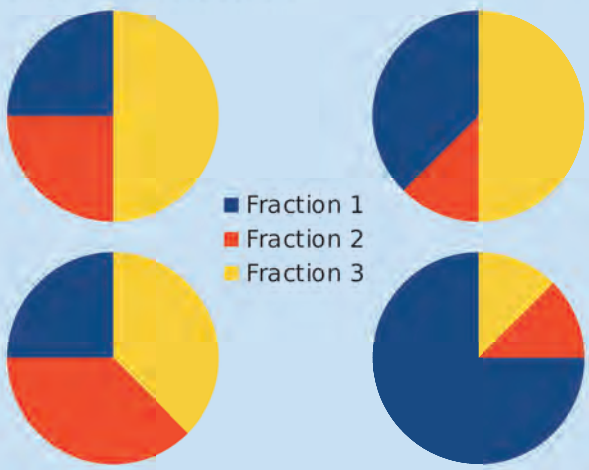
	A	B	C	D
1	Fraction 1	Fraction 2	Fraction 3	Total
2	1/3	1/3	1/3	

b. Avant de les remplir, sélectionne les cellules A2, B2 et C2, puis effectue un clic droit. Dans *Formater les cellules*, choisis *Nombres* puis *Fraction*.

c. Dans la cellule D2, programme une formule permettant de calculer la somme des nombres en A2, B2 et C2.

d. Sélectionne l'ensemble des cellules A1, B1, C1, A2, B2, C2. Dans *Insertion*, choisis *Diagramme* puis *Secteur*.

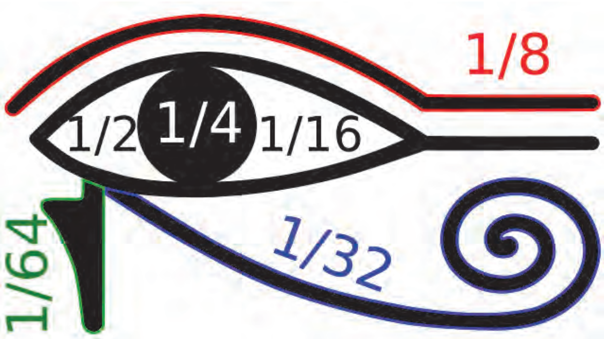
e. Écris de nouvelles fractions dans les cellules A2, B2 et C2, de sorte que leur somme soit égale à 1 et qu'elles correspondent aux diagrammes ci-dessous.



85 Une bouteille d'eau, remplie aux trois quarts, pèse 950 g. Quand elle est remplie à moitié, elle pèse 700 g. Quelle est la masse de la bouteille quand elle est vide ?

86 *Oudjat*

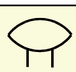
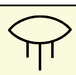
Osiris, dieu des Morts, épouse Isis. Son frère Seth, dieu de la Violence, le tue par jalousie. Horus, fils d'Isis et d'Osiris, décide de venger son père et provoque son oncle Seth. Celui-ci lui arrache un œil et le découpe en six morceaux. Thot, chargé par le tribunal divin de reconstituer l'œil d'Horus, donna une valeur à chaque morceau.



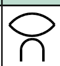
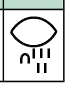
Quelle quantité de liant magique (sous forme de fraction) Thot doit-il ajouter, pour que l'œil soit reconstitué ?

87 *Fractions égyptiennes*

En Égypte, certaines fractions avaient leur propre signe :

$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{2}$	

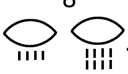
a. Recopie puis complète le tableau suivant.

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{15}$
									

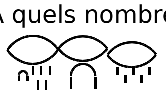
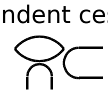
b. Calcule les sommes suivantes puis donne leur écriture égyptienne.

- $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$
- $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$
- $\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$

c. Pour écrire une fraction, les Égyptiens la décomposaient en une somme de fractions de numérateur 1.

Exemple : $\frac{3}{8}$ s'écrivait comme la somme de $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$, soit . Vérifie en faisant le calcul.

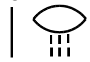
d. À quels nombres correspondent ces écritures ?

 et 

e. Inversement, propose une écriture égyptienne pour les fractions suivantes. Y a-t-il toujours une seule possibilité ?

- $\frac{5}{12}$
- $\frac{3}{14}$
- $\frac{7}{12}$
- $\frac{3}{5}$

f. Adjib le scribe ne pouvait pas écrire directement le résultat de l'opération $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$. Pourquoi ?

Il transformait alors successivement cette somme en $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, puis en $1+\frac{1}{6}$, et pouvait enfin écrire : 

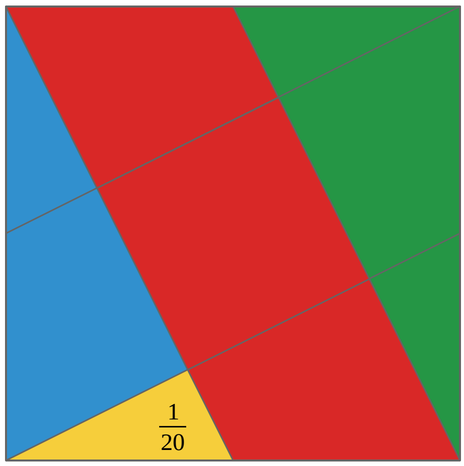
g. Fais comme lui pour les sommes :

- $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$
- $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$
- $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

$\left(\text{Indication : } \frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)$

88

Pour obtenir cette figure, on a joint le milieu de chaque côté du grand carré avec un de ses sommets. On obtient ainsi quatre pièces.



Le triangle jaune vaut $\frac{1}{20}$ de l'aire de ce carré.

a. Reproduis cette figure en prenant 8 cm pour la longueur du côté du grand carré.

b. Exprime sous la forme d'une fraction simplifiée la fraction du grand carré que représente :

- le triangle bleu ;
- le quadrilatère rouge ;
- le triangle vert.

c. Quelle fraction du carré représente cette figure ?

d. Quelles pièces assembler pour recouvrir les $\frac{3}{4}$ de ce carré ? Détaille tes calculs.

Exercices Synthèse

Série de sommes

On considère la série de sommes suivante.

$$\mathcal{S}_1 = 1 \; ; \; \mathcal{S}_2 = 1 + \frac{1}{2} \; ; \; \mathcal{S}_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \; ; \; \mathcal{S}_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \; ; \; \mathcal{S}_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

Cette série s'appelle la **série harmonique**. Elle joue un rôle très important en mathématiques.

a. Donne la valeur exacte de chacune de ces sommes.

b. Exprime $\mathcal{S}_6$ en fonction $\mathcal{S}_5$. Quelle est la valeur exacte de $\mathcal{S}_6$?

TICE Tableur

On veut obtenir une valeur approchée des 1 000 premiers termes de cette série, à l'aide du tableur.

c. Pour cela, recopie la feuille de calcul ci-dessous.
Dans la colonne A, écris tous les entiers jusque 1 000.
Dans la colonne B, programme les cellules pour qu'elles calculent la fraction $1/n$.

	A	B	C
1	n	$1/n$	$\mathcal{S}_n$
2	1	1	1
3	2	0,5	
4	3	0,333333333	
5	4	0,25	
6	5	0,2	
7	6	0,166666667	
8	...	...	
9	1000	0,001	

d. Quelle formule faut-il saisir en C3 pour obtenir la somme $\mathcal{S}_2$?

Recopie alors cette formule vers le bas.

e. À partir de quel terme de la série la somme dépasse-t-elle 4 ? 5 ? 6 ? 7 ?
À ton avis, la somme dépassera-t-elle 10 ? 100 ?

On considère maintenant la série de sommes suivante.

$$\mathcal{S}'_1 = 1 \; ; \; \mathcal{S}'_2 = 1 - \frac{1}{2} \; ; \; \mathcal{S}'_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \; ; \; \mathcal{S}'_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \; ; \; \mathcal{S}'_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

Cette série s'appelle la **série harmonique alternée**.

f. Donne la valeur exacte de chacune de ces sommes.

g. Exprime $\mathcal{S}'_6$ en fonction $\mathcal{S}'_5$. Quelle est la valeur exacte de $\mathcal{S}'_6$?

h. Dans une nouvelle feuille de calcul, construis la feuille ci-contre et complète-la.

i. Combien vaut le 100[e] terme de la série ? Le 1 000[e] ?
À ton avis, comment évoluent les termes de cette série ?

	A	B	C	D
1		n	$1/n$ ou $-1/n$	$\mathcal{S}'_n$
2		1	1	1
3	-1	2	-0,5	
4	1	3	0,333333333	
5	-1	4	-0,25	
6	1	5	0,2	
7	-1	6	-0,166666667	
8	...	...	...	
9	-1	1000	-0,001	

j. Il a été démontré que les termes de cette série se rapprochent de plus en plus du nombre 0,69314718... et qu'aucun terme de la série (à part le premier) est un nombre entier. Vérifie ces deux affirmations à l'aide de ta feuille de calcul.

N3

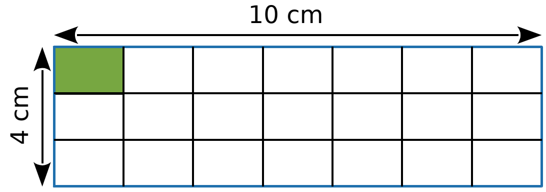
Fractions : multiplication et division

Activités

1 Produit de deux fractions

→ Cours : 1A

On considère la figure ci-contre. On veut calculer l'aire du rectangle vert par deux méthodes différentes, afin d'en déduire une règle sur la multiplication de deux fractions.



a Que représente, pour le rectangle vert, la fraction $\frac{10}{7}$? La fraction $\frac{4}{3}$?
Écris l'opération qui permet de calculer l'aire du rectangle vert.

b Que représente, pour le rectangle bleu, le produit 10×4 ? Le produit 7×3 ?
Le quotient $\frac{10 \times 4}{7 \times 3}$?

c À partir des deux méthodes, quelle égalité peut-on en déduire ?

d Selon toi, quelle règle de calcul permet de multiplier deux fractions entre elles ?

2 Produit en croix

→ Cours : 1B

a Sans poser d'opération, démontre que $\frac{126}{105} = \frac{72}{60}$.
Explique alors pourquoi $126 = 105 \times \frac{72}{60}$, puis pourquoi $126 \times 60 = 105 \times 72$.
Louane affirme que $\frac{772}{143} = \frac{239}{35}$. Qu'en penses-tu ?

b Explique pourquoi $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 21 \times 110 = 77 \times 30$.
Déduis-en alors facilement le terme manquant dans chacune des égalités suivantes et justifie : $\frac{21}{77} = \frac{30}{?}$ et $\frac{110}{30} = \frac{?}{21}$.

3 Inverse d'une fraction et division de deux fractions

→ Cours : 2

a Rappelle la définition de deux nombres inverses.
Quel est l'inverse de la fraction $\frac{7}{3}$? De la fraction $\frac{a}{b}$?

b Le quotient du nombre a par le nombre non nul b est noté $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$.

Pourquoi peut-on écrire que $a \div b = a \times \frac{1}{b}$?
Recopie et complète en utilisant le mot « inverse » :
« *Pour diviser un nombre a par un nombre non nul b, il suffit de ...* »

c En utilisant le résultat précédent, calcule $\frac{10}{7} \div \frac{5}{3}$, puis $\frac{10}{-7} \div \frac{-5}{-3}$.

1 Multiplication

A Produit de deux quotients

→ 17

Propriété Pour **multiplier des nombres en écriture fractionnaire**, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour tous nombres a, b, c et d, où b et d sont non nuls : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Remarque : Si $b = 1$, la formule devient $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$.

Cette formule permet de calculer la **fraction d'une quantité** (voir exemple 2).

Exemple 1 :

$A = -\frac{35 \times 39}{33 \times 80}$ → On détermine le signe du résultat.

$A = -\frac{7 \times \mathbf{5} \times 13 \times \mathbf{3}}{11 \times \mathbf{3} \times 2 \times \mathbf{5} \times 8}$ → On cherche des facteurs communs.

$A = -\frac{7 \times 13}{11 \times 2 \times 8}$ → On simplifie.

$A = -\frac{91}{176}$ → On calcule.

Exemple 2 :

Dans une classe de 28 élèves, les deux septièmes des élèves ont choisi l'option *Latin*.

Le nombre d'élèves ayant choisi cette option est égal à $\frac{2}{7} \times 28 = \frac{2 \times 28}{7} = \frac{2 \times 4 \times \mathbf{7}}{\mathbf{7}} = 8$ élèves.

B Produit en croix

→ 48

Propriété 1 Pour tous nombres a, b, c et d, où b et d sont non nuls :

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$

Exemple 1 :

Pour savoir si les fractions $\frac{7}{13}$ et $\frac{6}{11}$ sont égales, on calcule les produits en croix 7×11 et 6×13.

Si ces fractions étaient égales, alors les produits en croix seraient égaux.
Comme ils ne le sont pas, ces fractions ne sont pas égales.

Propriété 2 Pour tous nombres a, b, c et d, où b et d sont non nuls :

si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemple 2 :

On cherche le nombre x vérifiant l'égalité $\frac{364}{156} = \frac{x}{33}$.

D'après la propriété 1, on en déduit que $364 \times 33 = 156 \times x$, c'est-à-dire : $156 \times x = 12\,012$.

On en déduit aussi que $x = \frac{12\,012}{156} = 77$.

On a donc l'égalité $\frac{364}{156} = \frac{77}{33}$.

2 Division

A Inverse d'un quotient

→ 51

Propriété

- Tout nombre x non nul admet un inverse (noté x^{-1}) qui est le nombre $\dfrac{1}{x}$.
- Tout quotient $\dfrac{a}{b}$, avec a et b non nuls, admet un inverse qui est le nombre $\dfrac{b}{a}$.

Démonstration :

Soit un quotient $\dfrac{a}{b}$, avec a et b non nuls.

Comme $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{a} = \dfrac{a \times b}{b \times a} = 1$, les nombres $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{b}{a}$ sont inverses l'un de l'autre.

Exemple :

L'inverse du quotient $\dfrac{-5}{13}$ est $\dfrac{13}{-5} = \dfrac{-13}{5}$.

B Division de deux quotients

→ 58

Propriété

Diviser par un nombre non nul revient à **multiplier par son inverse**.

Pour tous nombres a, b, c et d où b, c et d sont non nuls :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemple 1 :

$C = \dfrac{-8}{7} \div \dfrac{5}{-3}$

$C = + \left(\dfrac{8}{7} \div \dfrac{5}{3}\right)$ — On détermine le signe du résultat.

$C = \dfrac{8}{7} \times \dfrac{3}{5}$ — On multiplie par l'inverse du deuxième quotient.

$C = \dfrac{8 \times 3}{7 \times 5}$ — On multiplie les fractions sans oublier de simplifier.

$C = \dfrac{24}{35}$ — On calcule.

Exemple 2 :

$D = \dfrac{-\frac{32}{21}}{\frac{-48}{-35}}$

$D = -\dfrac{\frac{32}{21}}{\frac{48}{35}}$

$D = -\dfrac{32}{21} \times \dfrac{35}{48}$

$D = -\dfrac{8 \times 2 \times 2 \times 7 \times 5}{7 \times 3 \times 3 \times 2 \times 8}$

$D = -\dfrac{10}{9}$

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Calcule.

$A = \frac{7}{8} \times \frac{3}{4}$ | $C = \frac{1}{5} \times \frac{8}{7}$ | $E = \frac{3}{8} \times 5$

$B = \frac{4}{3} \times \frac{7}{5}$ | $D = 5 \times \frac{7}{2}$ | $F = \frac{0{,}7}{3} \times \frac{1}{4}$

2 Simplifie puis calcule chaque produit.

a. $\frac{17}{3} \times \frac{4}{17}$ **c.** $\frac{45}{14} \times \frac{42}{75}$ **e.** $2 \times \frac{5}{8}$

b. $\frac{7}{11} \times \frac{11}{7}$ **d.** $\frac{27}{26} \times \frac{65}{72}$ **f.** $\frac{5{,}1}{4} \times 8$

3 Traduis chaque phrase par une expression mathématique, puis calcule-la.

a. La moitié d'un quart.
b. La moitié de la moitié.
c. Le tiers d'un sixième.

4 Calcule chaque produit.

a. $\frac{-4}{19} \times \frac{1}{-4}$ **c.** $-\frac{16}{25} \times \frac{5}{-8}$

b. $\frac{3}{-2} \times \frac{-5}{-2}$ **d.** $-5 \times \frac{11}{10}$

5 Complète chaque égalité.

a. $\frac{-3}{7} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{-15}{49}$ **b.** $\frac{3}{5} \times \frac{\dots}{\dots} = -1$

6 Utilise le produit en croix pour déterminer si les écritures fractionnaires $\frac{2{,}7}{7{,}02}$ et $\frac{2{,}9}{7{,}54}$ sont égales.

7 On sait que $34 \times 27 = 6 \times 918$. Donne deux fractions égales utilisant ces nombres.

8 Donne l'inverse de chaque nombre.

8 ; $\frac{3}{4}$; $\frac{-1}{17}$; -1 ; $0{,}5$; $-\frac{5}{3}$

9 Calcule.

a. $\frac{5}{3} \div \frac{7}{13}$ **c.** $11 \div \frac{1}{11}$

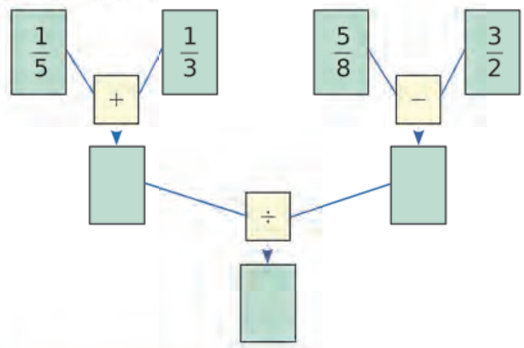
b. $\frac{3}{5} \div \left(-\frac{9}{15}\right)$ **d.** $\frac{-21}{5} \div (-3)$

10 En utilisant, au plus une seule fois, les nombres : $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{18}$ et des signes opératoires, essaie d'obtenir comme résultat...

a. $\frac{7}{6}$ **b.** $\frac{26}{18}$ **c.** 0

11 Calcule $G = \frac{7}{6} - \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$.

12 Complète.



13 **Vrai ou Faux**

P.1. $-4 \times \frac{5}{3} = \frac{-20}{12}$

P.2. $\frac{-3}{20}$ est la moitié de $\frac{-3}{10}$.

P.3. Si deux fractions sont égales, le produit de leurs numérateurs est égal au produit de leurs dénominateurs.

P.4. $\frac{-1}{4}$ est l'inverse de -4.

P.5. $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{7}$

Multiplication

14 Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

$A = \frac{7}{5} \times \frac{3}{4}$ | $C = \frac{1}{5} \times \frac{8}{7}$ | $E = \frac{3}{8} \times 32$

$B = \frac{4}{3} \times \frac{7}{4}$ | $D = \frac{8}{11} \times \frac{8}{11}$ | $F = 5 \times \frac{7}{2}$

15 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

$G = \frac{0,7}{6} \times \frac{1}{4}$ | $H = \frac{1,4}{3} \times \frac{0,9}{28}$ | $I = \frac{1,7}{0,5} \times \frac{1,3}{2,5}$

16 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{45}{14} \times \frac{49}{60}$ **c.** $\frac{45}{26} \times \frac{65}{72}$ **e.** $\frac{7}{6} \times \frac{6}{7}$

b. $\frac{5}{3} \times \frac{4}{5}$ **d.** $2 \times \frac{9}{6}$ **f.** $25 \times \frac{11}{50}$

17 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{2,5}{3} \times \frac{3}{0,5}$ **b.** $5,6 \times \frac{9}{0,7}$ **c.** $0,55 \times \frac{2}{11}$

18 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{5}{11}$ **d.** $\frac{6}{5} \times \frac{1}{14} \times \frac{7}{3}$

b. $\frac{3}{5} \times \frac{13}{7} \times \frac{5}{2}$ **e.** $\frac{45}{6} \times \frac{1}{9} \times \frac{18}{7}$

c. $\frac{3}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{11}$ **f.** $6 \times \frac{1}{88} \times \frac{11}{12}$

19 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{5,5}{3} \times \frac{9}{7,7}$ **c.** $0,6 \times \frac{2}{3,6}$

b. $6 \times \frac{2,8}{3} \times \frac{5}{0,7}$ **d.** $\frac{17}{12,5} \times \frac{2,5}{1,7}$

20 Recopie et complète chaque égalité.

a. $\frac{7}{3} \times \frac{...}{...} = \frac{28}{15}$ **c.** $\frac{7}{2} \times \frac{...}{...} = \frac{3}{10}$

b. $\frac{11}{17} \times \frac{...}{...} = 1$ **d.** $\frac{1,5}{2} \times \frac{...}{...} = \frac{9}{20}$

21 Traduis par une expression puis calcule-la.

a. La moitié d'un tiers. **c.** Le tiers de la moitié.

b. Le triple d'un tiers. **d.** Le double d'un tiers.

22 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. La moitié du tiers d'un gâteau de 600 g.

b. Le dixième des trois quarts de 940 km.

c. Le cinquième de la moitié de 60 min.

d. La moitié des deux tiers de 27 élèves.

23 Un champ rectangulaire a les dimensions suivantes : un demi-hectomètre et cinq tiers d'hectomètre. Quelle est son aire ?

24 ***Jeu de fléchettes***

Une cible comprend une zone gagnante (G) et une zone perdante (P). Dans une partie, chaque joueur effectue trois jets de fléchettes. En début de partie, chaque joueur possède 24 points puis, après chaque jet, il multiplie ces points par :

	1er jet	2e jet	3e jet
Gagnante (G)	× 2	× 3	× 4
Perdante (P)	× 1/2	× 1/3	× 1/4

Paul et Mattéo ont joué une partie. Voici leurs résultats : G, P, P pour Paul et P, G, G pour Mattéo.

a. Calcule le score de chacun.

b. Quel score maximal peut-on atteindre ?

c. Quel score minimal peut-on atteindre ?

25 On vide le tiers d'un litre de sirop de menthe et on remplace ce tiers par de l'eau. On vide ensuite les trois quarts de ce mélange.

Quelle quantité de pur sirop de menthe reste-t-il dans la bouteille ? Exprime celle-ci en fraction de litre.

26 Un primeur a vendu les $\frac{2}{3}$ de ses salades le matin et les $\frac{7}{8}$ du reste l'après-midi.

a. Quelle fraction de ses salades lui restait-il à midi ?

b. Quelle fraction de ses salades le primeur a-t-il vendue l'après-midi ?

27 Donne le signe de chaque produit.

$A = \frac{-3}{17} \times \frac{-4}{11} \times \frac{-5}{-7} \times \frac{19}{-13}$

$B = \frac{2,1}{0,7} \times \frac{-0,1}{-15} \times \frac{3,4}{8} \times \frac{2}{-1,9}$

$C = \frac{-1,7}{4,5} \times \frac{-10}{-5} \times \frac{3,9}{7} \times \frac{-0,8}{2,2}$

28 Calcule chaque produit.

a. $-\frac{3}{2} \times \frac{5}{7}$

b. $\frac{-4}{11} \times \frac{1}{-3}$

c. $3 \times \frac{-7}{5}$

d. $\frac{5}{-4} \times \frac{5}{-2}$

29 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{0,8}{17} \times \frac{5}{-3}$

b. $-\frac{1,3}{5} \times \left(-\frac{2}{11}\right)$

c. $\left(-\frac{7}{15}\right) \times (-8) \times \frac{2}{3}$

d. $\frac{-1}{2} \times \frac{5}{-4} \times \frac{-3}{2}$

30 ***Simplifier avant de calculer***

a. Écris 15 sous la forme d'un produit de deux nombres entiers. Décompose également 20 en produit de nombres entiers positifs les plus petits possibles.

b. Recopie et complète les égalités suivantes :

$$\frac{-15}{7} \times \frac{11}{20} = -\frac{\ldots \times \ldots}{\ldots \times \ldots} = -\frac{(\ldots \times \ldots) \times \ldots}{\ldots \times (\ldots \times \ldots \times \ldots)}$$

c. Simplifie l'expression obtenue et donne le résultat sous forme d'une fraction qu'on ne peut plus simplifier.

31 Calcule chaque produit et donne le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

a. $\frac{-5 \times 2}{2 \times 7}$

b. $\frac{4 \times (-11)}{4 \times (-11) \times 3}$

c. $\frac{8 \times (-3) \times 7 \times 5}{3 \times 5 \times 8 \times 7}$

d. $\frac{5 \times (-9) \times 2}{-7 \times 10 \times (-1)}$

32 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{8}{5} \times \frac{5}{7}$

b. $\frac{-3}{10} \times \frac{-11}{3}$

c. $\frac{-2}{3} \times \frac{-5}{2} \times \frac{3}{-7}$

d. $\frac{5}{-7} \times \left(-\frac{7}{5}\right)$

e. $-15 \times \frac{2}{15}$

f. $\left(-\frac{8}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times 3$

33 Complète chaque égalité.

a. $\frac{8}{\ldots} \times \frac{7}{3} = -\frac{8}{3}$

b. $\frac{-5}{3} \times \frac{7}{\ldots} = \frac{7}{6}$

c. $\frac{6}{5} \times \ldots = -6$

d. $\left(-\frac{8}{21}\right) \times \frac{\ldots}{\ldots} = 1$

34 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{\ldots}{10} \times \frac{7}{\ldots} = -5$

b. $\frac{\ldots}{-9} \times \frac{2}{\ldots} = \frac{4}{15}$

c. $\frac{-5}{\ldots} \times \frac{3}{-14} \times \frac{\ldots}{25} = \frac{-2}{7}$

35 Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

a. $\frac{-7}{25} \times \frac{-5}{8}$

b. $\frac{18}{-49} \times \frac{14}{27}$

c. $\frac{45}{28} \times \frac{7}{-15}$

d. $\frac{-2}{6} \times \left(-\frac{21}{11}\right)$

36 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{21}{32} \times \frac{108}{49}$

b. $-26 \times \frac{-5}{39}$

c. $\frac{8}{5} \times \frac{-5}{21} \times \left(-\frac{9}{16}\right)$

d. $\frac{56}{-5} \times \frac{30}{21} \times \frac{7}{10}$

37 Utilise ta calculatrice pour calculer les produits suivants, et donne les résultats sous la forme d'une fraction simplifiée.

a. $\frac{686}{-153} \times \frac{-99}{-196}$

b. $\frac{2,1}{12,5} \times \left(-\frac{6,25}{0,49}\right)$

38 Reproduis et complète les tables de multiplication. Simplifie quand c'est possible.

a.

$\times$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{10}$
$-\frac{1}{2}$				
$+8$				

b.

$\times$	$-\frac{5}{21}$		$\frac{8}{13}$	
$\frac{7}{-2}$		-1		$\frac{21}{2}$
$+\frac{26}{15}$				

39 Recopie puis complète les pyramides suivantes afin que le nombre contenu dans une case soit le produit des nombres contenus dans les deux cases situées en dessous de lui. Simplifie les fractions quand c'est possible.

a.

$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{5}{7}$

b.

-3	$\frac{3}{8}$	-1	$-\frac{1}{4}$

40 Calcule mentalement.

a. Les trois quarts de 400.

b. Le double de $\frac{-7}{15}$.

c. Les cinq septièmes des six cinquièmes de 1.

d. Les $\frac{7}{10}$ de $\frac{9}{10}$.

41 Abdel dépense les $\frac{5}{12}$ de son argent de poche, puis les trois quarts de ce qui lui reste.

a. Quelle fraction de son argent de poche a-t-il dépensée la deuxième fois ?

b. Le montant de son argent de poche étant de 72 €, combien a-t-il dépensé au total ?

42 QCM

a. $\frac{-3}{7} \times \frac{7}{-5} =$

R.1	R.2	R.3
$-\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$

b. $\frac{-3}{7}$ est le produit de...

R.1	R.2	R.3
-3 et 7	$-\frac{1}{3}$ et 7	-3 et $\frac{1}{7}$

c. Le carré de $\frac{5}{-4}$ est...

R.1	R.2	R.3
$\frac{25}{16}$	$\frac{25}{-16}$	$\frac{10}{-8}$

Produit en croix

43 Dans chaque cas ci-dessous, à partir des égalités données et en utilisant seulement les quatre nombres qui apparaissent, écris toutes les égalités d'écritures fractionnaires possibles.

a. $7 \times 8 = 4 \times 14$ **b.** $2{,}1 \times 12 = 9 \times 2{,}8$

44 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $-4 \times 9 = 12 \times (-3)$ **b.** $-3 \times (-1) = 2 \times 1{,}5$

45 Recopie et complète. Justifie par un calcul.

a. $\frac{12}{56} = \frac{...}{84}$

b. $\frac{19}{...} = \frac{4}{11}$

c. $\frac{...}{23{,}1} = \frac{0{,}4}{0{,}5}$

d. $\frac{25}{0{,}2} = \frac{333}{...}$

46 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{-5}{12} = \frac{...}{18}$

b. $\frac{...}{-2{,}4} = \frac{0{,}8}{3{,}2}$

c. $\frac{4}{...} = \frac{5}{-7}$

d. $\frac{819}{-195} = \frac{-63}{...}$

47 Recopie et complète en utilisant = ou ≠, en justifiant par un calcul dans chaque cas.

a. $\frac{87}{94}$ ... $\frac{1653}{1786}$ **b.** $\frac{8{,}14}{7{,}2}$ ... $\frac{21{,}978}{18{,}72}$

48 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{-9{,}1}{5{,}2}$ ... $\frac{79{,}8}{-45{,}6}$ **b.** $\frac{-5}{-3}$ ... $\frac{-3{,}5}{2{,}1}$

49 Sandrine compare les étiquettes de deux paquets de biscuits. Le premier, d'un poids de 67 g, contient 23 g de sucre. Le second, d'un poids de 368,5 g, contient 126,5 g de sucre. La proportion de sucre est-elle la même dans les deux paquets ?

Division

50 Recopie et complète les égalités suivantes. Écris quatre phrases utilisant le mot « inverse(s) ».

a. $4 \times \frac{1}{\dots} = 1$

b. $\dots \times 0{,}25 = 1$

c. $\frac{\dots}{25} \times \frac{\dots}{7} = 1$

d. $\frac{3}{4} \times \frac{\dots}{\dots} = 1$

51 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{1}{\dots} \times (-3) = 1$

b. $\dots \times \left(-\frac{1}{15}\right) = 1$

c. $\dots \times \left(-\frac{8}{5}\right) = 1$

d. $-0{,}01 \times \dots = 1$

52 ***Ne pas confondre !***

Recopie et complète les égalités suivantes.

$$\left(\frac{9}{-14}\right) \times \dots = 1 \text{ et } \left(\frac{9}{-14}\right) + \dots = 0$$

a. Écris une phrase utilisant le mot « opposé(s) » et une autre avec le mot « inverse(s) ».

b. Trouve deux nombres qui sont leur propre inverse. Trouve un nombre qui est son propre opposé.

c. Tous les nombres ont-ils un inverse ? Un opposé ?

d. Quel est l'opposé de l'inverse de 4 ? Quel est l'inverse de l'opposé de 4 ?

53 On considère les notations x^{-1} et $\frac{1}{x}$.

a. Que désignent-elles ?

b. Recopie et complète le tableau ci-dessous avec des écritures fractionnaires.

x	7	$\frac{-3}{5}$	$-\frac{8}{9}$	$-0{,}6$	1,25
x^{-1} ou $\frac{1}{x}$					

c. Détermine l'inverse de l'inverse de chaque nombre. Que remarques-tu ?

54 ***Mentalement***

a. Effectue mentalement les calculs suivants.

- $16 \div 2$;
- $16 \times 0{,}5$;
- $100 \times 0{,}25$;
- $100 \div 4$.

b. Justifie les résultats égaux.

55 Calcule chaque quotient ci-dessous et donne le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

a. $\frac{2}{3} \div 5$

b. $\frac{5}{6} \div \frac{7}{11}$

c. $8 \div \frac{1}{8}$

d. $\frac{1}{10} \div \frac{7}{9}$

56 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

$$A = \frac{2}{\frac{3}{5}} \qquad B = \frac{\frac{2}{3}}{5} \qquad C = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{11}}$$

57 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $12 \div \frac{7}{-4}$

b. $\frac{-5}{7} \div (-4)$

c. $1 \div \left(\frac{-7}{4}\right)$

d. $\frac{-3}{2} \div \frac{-5}{7}$

58 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{8}{-15} \div \frac{-4}{5}$

b. $\frac{9}{10} \div (-3)$

c. $\frac{-4}{45} \div \frac{16}{15}$

d. $\frac{-5}{6} \div \left(-\frac{15}{18}\right)$

59 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

$$A = \frac{12}{\frac{4}{11}} \qquad B = \frac{\frac{-2}{7}}{-8} \qquad C = -\frac{\frac{-33}{5}}{\frac{22}{-25}}$$

60 ***Fractions à partager !***

a. Calcule la moitié de $\frac{-5}{12}$.

b. Un disque dur est plein aux $\frac{3}{7}$ de sa capacité.

Il ne comporte que quatre fichiers de même taille. Quelle fraction du disque dur occupe chacun d'entre eux ?

61 QCM

a. L'inverse de $\frac{13}{17}$ est...

R.1	R.2	R.3
inférieur à 1	supérieur à 1	égal à 1

b. Quel est le résultat négatif ?

R.1	R.2	R.3
$\frac{-2{,}1}{6} \div \left(-\frac{1{,}5}{2}\right)$	$-12 \div \frac{-7}{-4}$	$\frac{-8{,}8}{-0{,}8} \div \frac{-2}{-0{,}5}$

c. $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{-2}{5}} =$

R.1	R.2	R.3
-1	$\frac{25}{4}$	$-\frac{25}{4}$

62 ***Avec des lettres***

a. Sachant que $a = \frac{-2}{21}$ et $b = \frac{5}{-7}$, calcule :

- $\frac{a}{b}$ • $\frac{b}{a}$ • $a \times b$ • $a + b$ • $a - b$

Tu donneras les résultats sous la forme d'une fraction simplifiée.

b. Même consigne avec $a = \frac{5}{24}$ et $b = -\frac{35}{18}$.

63 Gilles prépare des cocktails de jus de fruit.

- Dans la préparation « *Coco Plus* », il met $\frac{2}{3}$ L de lait de coco dans un mélange qui contient $\frac{3}{4}$ L en tout.
- Dans la préparation « *Super Coco* », il met $\frac{4}{3}$ L de lait de coco dans un mélange qui contient $\frac{5}{3}$ L en tout.

Quel cocktail contient la plus forte proportion de lait de coco ?

Calculs variés

64 Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

$A = 5 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$

$B = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$

$C = \left(\frac{5}{6} + \frac{7}{12}\right) \times \frac{3}{5}$

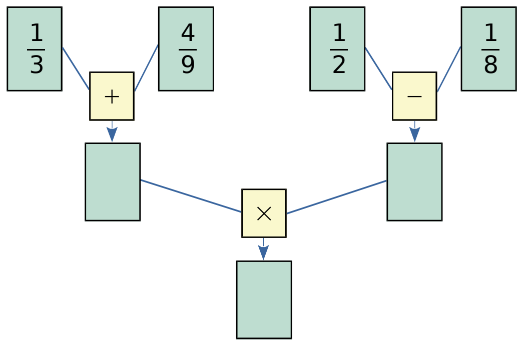
$D = \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} + \frac{28}{15} \times \frac{25}{14}$

$E = \left(\frac{1}{3} \times \frac{6}{5} - \frac{3}{10}\right) \times \frac{15}{4}$

$F = \frac{8+2}{7+2} \times \frac{3 \times 6}{5 \times 3}$

65 ***Calculs en série***

a. Recopie et complète le diagramme suivant.



b. Écris, sur une seule ligne, l'expression mathématique correspondant à ce calcul.

66 Un fleuriste a vendu les $\frac{3}{5}$ de ses bouquets le matin, et les $\frac{3}{10}$ du reste l'après-midi.

a. Quelle fraction des bouquets lui restait-il en fin de journée ?

b. Sachant qu'il lui restait 7 bouquets en fin de journée, quel était le nombre initial de bouquets ?

67 On donne : $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{4}{9}$ et $c = \frac{5}{3}$.

a. Calcule $a \times b + a \times c$, puis $a \times (b + c)$.

b. Que remarques-tu ?

68 Effectue les calculs suivants.

a. La somme de $\frac{1}{10}$ et du produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{2}{5}$.

b. Le produit de $\frac{1}{3}$ par la somme de $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{10}$.

c. La différence de $\frac{41}{12}$ et du produit de $\frac{5}{2}$ par la somme de $\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{6}$.

69 **QCM**

a. $7 \times \frac{2}{5} - \frac{2}{5} =$

R.1	R.2	R.3
0	$\frac{12}{5}$	$\frac{6}{5}$

b. $\frac{2+3}{4 \times 7}$ s'écrit aussi...

R.1	R.2	R.3
$(2 + 3) \div (4 \times 7)$	$2 + 3 \div 4 \times 7$	$(2 + 3) \div 7(4 \times 7)$

c. $\frac{5}{3} - \frac{2}{3} \div \frac{5}{3} + \frac{2}{3} =$

R.1	R.2	R.3
$\frac{3}{3} \div \frac{7}{3}$	$\frac{5}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}$	$\frac{3}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3}$

d. Quel est le plus grand résultat ?

R.1	R.2	R.3
$\frac{1}{3} + \frac{4}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{4}{3}$	$\frac{1}{3} \div \frac{4}{3}$

70 Après avoir fait un footing, j'ai bu tout le contenu d'une petite bouteille d'eau d'un demi-litre. J'ai ensuite bu le quart du contenu d'une bouteille de $\frac{3}{4}$ L. Quelle quantité d'eau ai-je bue en tout ?

71 Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre.
- Le multiplier par $\frac{3}{4}$.
- Ajouter $\frac{5}{8}$ au résultat obtenu.

Quel nombre obtient-on en prenant :

a. -5 comme nombre de départ ?

b. $\frac{7}{8}$ comme nombre de départ ?

72 Invente un problème où, pour trouver la solution, on doit effectuer le calcul suivant :

$$\frac{5}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right)$$

73 Marco et sa famille font une randonnée en ski de fond, qui dure trois jours, dans un parc près de leur région. Le premier jour, ils ont parcouru le premier tiers de l'itinéraire. Lors de la deuxième journée, ils ont parcouru cinq huitièmes du reste de l'itinéraire. Finalement, au début de la dernière journée, Marco encourage les membres de sa famille en disant qu'il ne reste que 15 km à parcourir.

Quelle est la distance totale de leur randonnée à ski ?

74 Pour chaque question ci-dessous, donne au moins deux solutions différentes. Écris...

a. $-\frac{1}{3}$ comme un produit de trois facteurs ;

b. $-\frac{9}{11}$ comme une somme de quatre termes ;

c. $-\frac{3}{4}$ comme une différence de deux termes ;

d. $\frac{5}{7}$ comme un quotient de deux fractions.

75 ***Petite démonstration***

a. Calcule $\left(\frac{4}{7}\right)^2$ et $\frac{4^2}{7^2}$. Que remarques-tu ?

b. Même question avec $\left(\frac{-8}{3}\right)^2$ et $\frac{(-8)^2}{3^2}$.

c. Puis avec $\left(\frac{-10}{-9}\right)^2$ et $\frac{(-10)^2}{(-9)^2}$.

d. Pour tous nombres a et b avec b non nul, que vaut $\left(\frac{a}{b}\right)^2$? Démontre-le.

76 Effectue les calculs suivants en respectant les priorités opératoires.

$A = \frac{1}{5} \times \frac{-4}{3} + \frac{7}{2}$

$B = \frac{4}{5} \div \left(-\frac{3}{7}\right) - \frac{7}{10}$

$C = \frac{13}{7} + \left(-\frac{8}{7}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right)$

$D = \frac{7}{3} + \frac{3}{2} \times \frac{-10}{21}$

$E = \frac{5}{8} + \left(-\frac{3}{4}\right) \div \left(-\frac{9}{16}\right)$

$F = \frac{6}{5} - \left(-\frac{1}{9}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right)$

77 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

$A = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right)$

$B = \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{2}\right) \div \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)$

$C = \frac{3}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} - \frac{4}{3}$

$D = \frac{4}{3} - \frac{5}{2} \div \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4}$

78 ***Résistances en parallèle***

a. Effectue le calcul suivant et donne le résultat sous forme d'une fraction qu'on ne peut plus simplifier.

$$A = \frac{1}{9} + \frac{1}{12}$$

b. En électricité, pour calculer des valeurs de résistances, on utilise la formule suivante.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Sachant que R_1 = 9 ohms et que R_2 = 12 ohms, détermine la valeur exacte de R.

c. Reprends la question précédente avec R_1 = 7 ohms et que R_2 = 11 ohms.

79 On considère les expressions

$A = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \div \frac{20}{21}$ et $B = \left(2 + \frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right)$.

a. Calcule A en détaillant les étapes du calcul et écris le résultat sous la forme d'une fraction qu'on ne peut plus simplifier.

b. Calcule B et écris le résultat sous la forme d'un entier.

80 **Vrai ou Faux**

P.1. Le produit d'une fraction par l'inverse de son opposé est égal à − 1.

P.2. Le quotient d'une fraction par son inverse est égal au carré de cette fraction.

P.3. Quand je divise un nombre par $\frac{7}{8}$, il devient plus petit.

P.4. Prendre $\frac{3}{2}$ d'un nombre, c'est lui ajouter sa moitié.

P.5. 1 est son propre opposé et son propre inverse.

P.6. Diviser un nombre par $\frac{1}{2}$ revient à prendre son double.

81 ***Égalités et fractions***

a. L'égalité $3x^2 + 5x - 3 = 6x + 1$ est-elle vraie pour $x = \frac{4}{3}$?

b. Teste l'égalité $\frac{x-1}{2x+5} = \frac{-3x+2}{x-3}$ dans le cas où $x = -\frac{1}{4}$.

82 Calcule chaque expression lorsque $a = \frac{2}{3}$; $b = -\frac{3}{2}$ et $c = \frac{-3}{4}$.

a. $3a - b - c$

b. $-2a + 4b - 5c$

c. $6b^2 - 3a + 5$

d. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

e. $\frac{a+c}{a-b}$

83 Calcule puis simplifie au maximum le résultat.

$A = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}$

$B = \frac{7}{5} + \dfrac{\frac{8}{15}}{\frac{2}{3}} - \frac{19}{2}$

84 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

$C = 2 + \dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{5}{14}}$

$D = \dfrac{3 - \frac{7}{5}}{1 - \frac{9}{10}}$

$E = -\frac{3}{14} - \dfrac{3}{\frac{7}{5}} + 2$

$F = \frac{7}{-8} + \dfrac{\frac{5}{6}}{4} - 1$

85 Calcule astucieusement.

$$A = \frac{\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{3}{5}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)\left(1-\frac{5}{5}\right)}{3-\frac{2}{7}}$$

$$B = \frac{25}{8} \times \frac{\left(\frac{23}{4} - 13 \times \frac{27}{19}\right)}{\frac{23}{4} - 13 \times \frac{27}{19}} \div \frac{35}{8}$$

$$C = \cfrac{12}{9 + \cfrac{8}{7 + \cfrac{6}{5 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{2}{1+1}}}}}$$

$$D = \left(2 + \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{3}{7} - \frac{8}{9}}{\frac{8}{9} - \frac{3}{7}}$$

86 Boris a gagné au jeu « *Mégariche* » le week-end dernier. Il décide de partager la somme avec ses amis. Il donne un huitième des gains à Marc et un sixième à Fabrice. Il propose un cinquième de ce qu'il n'a pas encore distribué à Bruno. Le reste, il le garde pour lui.

Quelle fraction du gain reste-t-il à Boris ?

87 Le volume $\mathcal{V}$ d'un tonneau est donné par la formule suivante.

$$\mathcal{V} = \pi L \left[\frac{d}{2} + \frac{2}{3}\left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2}\right)\right]^2$$

a. Calcule le volume de ce tonneau en m^3. Tu donneras la valeur approchée à 0,001 m^3 par excès, puis en litres à 1 litre par excès, sachant que : L = 1,60 m d = 0,85 m D = 1,34 m.

b. Un viticulteur décide d'utiliser ce tonneau pour faire fermenter son raisin. Combien de bouteilles de 75 cl pourra-t-il remplir pour commercialiser son vin rouge ?

88 La longueur et la largeur d'un rectangle ont été multipliées respectivement par $\frac{7}{5}$ et $\frac{2}{3}$.

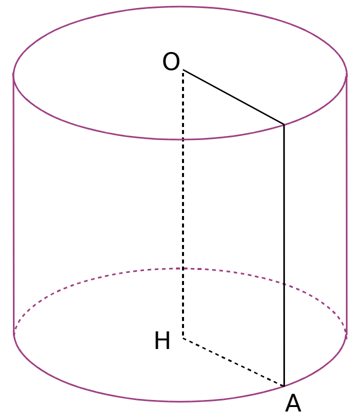
a. Par quel nombre a été multipliée l'aire du rectangle initial ? (Tu donneras le résultat sous la forme d'une fraction.)

b. Par quelle fraction a été multiplié le périmètre du rectangle initial, sachant que sa longueur mesure 7 cm et sa largeur mesure 4 cm ?

89 On considère ce cylindre de révolution $\mathcal{C}$ de hauteur OH.

$OH = \frac{4}{3}$ dm

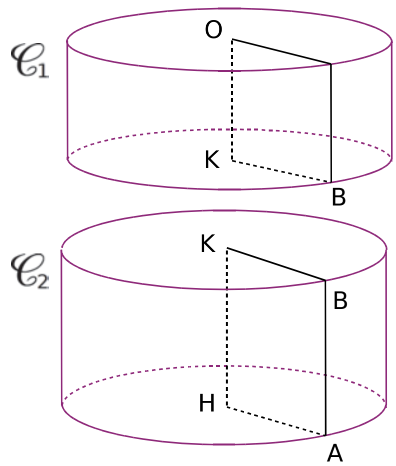
$AH = \frac{3}{2}$ dm



a. Calcule OA en justifiant ta réponse.

b. Calcule le volume $\mathcal{V}$ de $\mathcal{C}$. Tu donneras le résultat sous la forme $k\pi$, où k est un nombre entier.

On coupe le cylindre $\mathcal{C}$ aux neuf seizièmes de sa hauteur en partant du point O. On obtient alors deux cylindres de révolution $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, comme le montre le schéma ci-dessous (les dimensions ne sont pas respectées).



c. Combien mesure la hauteur [OK] de $\mathcal{C}_1$? Déduis-en la mesure de la hauteur [KH] de $\mathcal{C}_2$.

d. Quelle est la mesure du rayon de la base de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$?

e. Calcule $\mathcal{V}_1$, le volume de $\mathcal{C}_1$. Tu donneras le résultat sous la forme $p\pi$ où p est une fraction la plus simple possible.

f. Calcule et simplifie le rapport $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2}$.

Que remarques-tu ?

Fractions continues

PARTIE 1

Une fraction continue simple est une expression de la forme : $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$ où les numérateurs de chaque fraction sont des 1. Cette expression se note : **[1,2,3,4]**.

a. Écris sous sa forme mathématique la fraction continue **[1,2,3]** puis donnes-en la valeur exacte.

b. Donne la valeur exacte de la fraction continue **[1,2,3,4]**. Vérifie avec ta calculatrice.

c. On considère maintenant la fraction continue **[0,1,5,3,7]**.
Voici un algorithme permettant de calculer cette expression.

> **Étape 1 :** Calculer l'inverse de 7. Ajouter 3.
> **Étape 2 :** Prendre l'inverse du nombre précédent. Ajouter 5.
> **Étape 3 :** Prendre l'inverse du nombre précédent. Ajouter 1.
> **Étape 4 :** Prendre l'inverse du nombre précédent. Ajouter 0.

À chaque étape, écris l'expression correspondante et donne la valeur exacte de cette expression.

d. Écris l'algorithme précédent pour la fraction continue $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7}}}}$, puis utilise ta calculatrice pour calculer sa valeur exacte.

e. Avec la méthode de ton choix, calcule une valeur approchée de la fraction continue **[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8]**.

PARTIE 2

Cet algorithme permet d'écrire une fraction inférieure à 1 sous la forme d'une fraction continue.

> **Étape 1 :** Si cette fraction a pour numérateur 1, c'est terminé.
> **Étape 2 :** Sinon, on écrit cette fraction f sous la forme $\frac{1}{f'}$ (où f' est l'inverse de la fraction f).
> **Étape 3 :** On écrit f' sous la forme d'une somme d'un nombre entier et d'une fraction f'' inférieure à 1.
> **Étape 4 :** On recommence à l'étape 1 avec la fraction f''.

Exemple : On choisit comme fraction de départ $f=\frac{12}{25}$.

Étape 1 : Cette fraction n'a pas pour numérateur 1. On passe à l'étape 2.

Étape 2 : $f=\frac{12}{25}=\cfrac{1}{\frac{25}{12}}$ avec $f'=\frac{25}{12}$. On passe à l'étape 3.

Étape 3 : $f'=\frac{25}{12}=2+\frac{1}{12}$ avec $f''=\frac{1}{12}$ et $f=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12}}$. On passe à l'étape 4.

Étape 4 : C'est terminé.

f. Trouve le développement en fraction continue de $\frac{8}{19}$ et de $\frac{13}{21}$ à l'aide de cet algorithme.

N4

Puissances

Activités

1 Le triangle de Sierpinski

Cours : 1

La figure de départ est un triangle équilatéral. Pour obtenir la figure 1, on construit à l'intérieur de celui-ci un triangle bleu, en joignant les milieux des côtés. De la même façon, pour obtenir la figure 2, on construit un petit triangle bleu dans chacun des triangles violets de la figure 1.

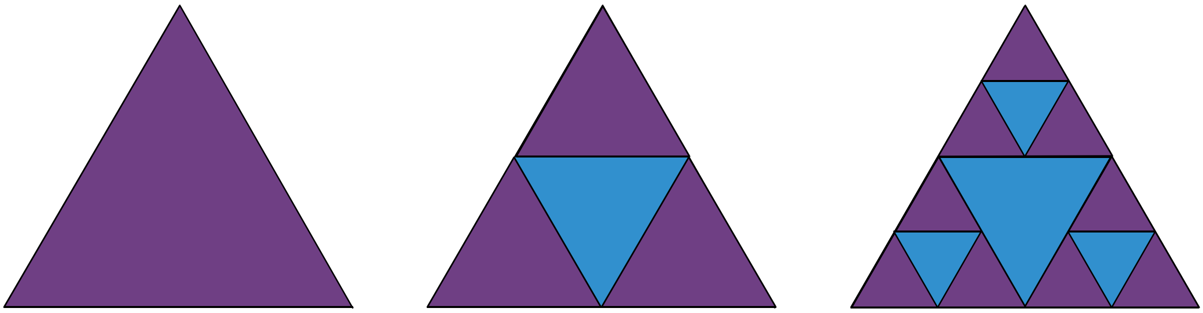


Figure de départ — Figure 1 — Figure 2

Pour la suite, on utilisera la notation « puissance », définie dans l'exemple suivant :
$3^4 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4\ \text{facteurs}}$. Cette expression se lit « 3 puissance 4 » ou « 3 exposant 4 ».

a De combien de triangles violets est composée la figure 2 ?
Écris la réponse sous la forme d'une puissance de 3.

b Imaginons que l'on continue à construire des triangles bleus dans les triangles violets.
Reprends la question précédente pour la figure 4, la figure 7 et la figure 20.

c À l'aide de ta calculatrice et de la touche x^n, indique de combien de triangles violets est composée la figure 10. Même question pour la figure 13, la figure 15 et la figure 18.

2 Puissances de 10 et ordre de grandeur

Cours : 2

a La distance de la Terre à la Lune est de 384 000 km.
Encadre cette longueur entre deux puissances de 10 consécutives.
Quel ordre de grandeur, en puissance de 10, semble être le plus approprié pour cette distance ?

b Reproduis ce tableau puis complète-le avec l'ordre de grandeur correspondant, parmi ces nombres : 0,000 000 000 000 001 m ; 0,000 01 m ; 0,001 m ; 1 m ; 1 000 m ; 10 000 000 m ; 10 000 000 000 000 000 m ; 100 000 000 000 000 000 000 m.
Complète enfin la dernière colonne par une puissance de 10.

Élément	Ordre de grandeur	Puissance de 10
Taille d'un homme		
Puce		
Sommet des Vosges		
Dimension d'une cellule humaine		
Rayon du noyau d'un atome d'hydrogène		
Diamètre de notre galaxie		
Une année-lumière		
Diamètre de la Terre		

c Combien de fois plus grand est l'ordre de grandeur :
- du diamètre de la Terre par rapport à celui d'un sommet des Vosges ?
- de la dimension d'une cellule humaine par rapport à celui du rayon d'un atome d'hydrogène ?
- du diamètre de notre galaxie par rapport à une année-lumière ? Qu'est-ce que cela signifie concrètement ?

3 Opérations et tableur

Cours : 2

a Saisis, dans les cellules A1 et B1, deux nombres quelconques. Saisis ensuite, dans la cellule C1, une formule permettant de calculer le produit des nombres contenus dans les cellules A1 et B1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	7	8	56				
2							
3							
4							
5							
6							

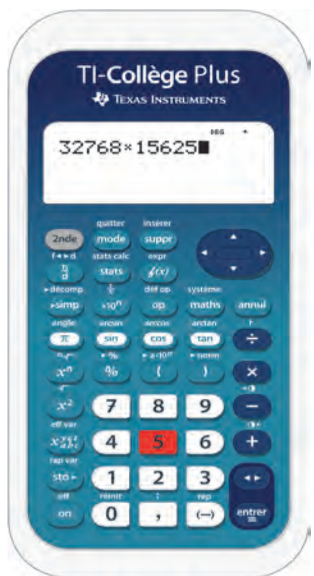
b Dans la cellule A1, saisis le nombre 1 000 000 000 000 000 000 et, dans B1, saisis le nombre 10 000. Qu'affiche le tableur dans la cellule A1 ? D'après toi, que signifie cet affichage ?
Peux-tu l'écrire sous la forme d'une puissance de 10 ?
Quel est l'affichage en C1 ?

c Saisis, dans les cellules A1 et B1, des nombres de la forme 100...0.
En observant la cellule C1, quelle formule générale peux-tu en déduire ?
Peux-tu expliquer cette formule ?

d Reprends la question précédente en modifiant la cellule C1, afin qu'elle calcule le quotient de la cellule A1 par la cellule B1. Quelle formule générale peux-tu en déduire ?

4 Écriture scientifique

Cours : 3



a À l'aide de ta calculatrice, détermine la valeur du produit suivant : 32 768 $\times$ 15 625.

b Déduis-en l'écriture décimale de 327 680 $\times$ 156 250 et de 327 680 000 $\times$ 1 562 500 (sans calculatrice).

c Vérifie chaque résultat à l'aide de ta calculatrice. Obtiens-tu la même valeur ?

d Pose et effectue l'addition 9 620 000 000 + 9 870 000 000, puis reprends la question **c**.

e Pour les trois calculs précédents, la calculatrice écrit le résultat sous forme scientifique.
À ton avis, qu'est-ce que la notation scientifique d'un nombre ?

Cours

1 Puissances d'un nombre relatif

→ 17

A Exposant positif

Définition

Pour tout nombre entier positif non nul n et tout nombre relatif a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad \text{et par convention : } a^0 = 1$$

a^n (lu « ***a* puissance *n*** ») est appelé **puissance** n-ième de a et n est appelé l'**exposant**

Remarque : $a^1 = a$

Exemples : $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ et $(-3)^5 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = -243$

B Exposant négatif

Définition

Pour tout nombre entier positif non nul n et tout nombre relatif a :

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{1}{a^n}$$

Exemple : $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0{,}008$

Remarque : a^{-1} est l'inverse de a et $a^{-1} = \frac{1}{a}$

C Règle de priorité

Propriété En l'absence de parenthèses, le calcul de la puissance est prioritaire sur les autres opérations.

Exemple : $1 + 2 \times 3^3 = 1 + 2 \times 27 = 1 + 54 = 55$

2 Puissances de 10

→ 35

A Définition

Définition Pour tout nombre entier positif non nul n :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zéros}} \quad \text{et par convention } 10^0 = 1$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}0\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$$

Exemples : $10^5 = 100\,000$ et $10^{-6} = 0{,}000\,001$

B Vocabulaire

Définition Ces préfixes désignent des multiples de puissances de 10 :

Téra	Giga	Méga	Kilo	Hecto	Déca	Déci	Centi	Milli	Micro	Nano	Pico
$\times 10^{12}$	$\times 10^{9}$	$\times 10^{6}$	$\times 10^{3}$	$\times 10^{2}$	$\times 10^{1}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-6}$	$\times 10^{-9}$	$\times 10^{-12}$

Exemples :
1 **Kilo**gramme = 10^3 grammes, 1 **Giga**Octet = 10^9 octets et 1 **Nano**mètre = 10^{-9} m

C Calculs avec les puissances de 10

→ 47

Propriétés Pour tous nombres entiers relatifs m et p :

$$10^m \times 10^p = 10^{m+p} \quad \text{et} \quad \frac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$$

Exemples :
- $A = 10^4 \times 10^3 = 10^{4+3} = 10^7 = 10\,000\,000$
- $B = \dfrac{10^{-7}}{10^3} = 10^{-7-3} = 10^{-10}$

3 Écriture scientifique

→ 65

A Multiplier par une puissance de 10

Propriétés
- Multiplier un nombre par 10^n revient à décaler la virgule de n **rangs vers la droite** (on complète par des zéros si nécessaire).
- Multiplier un nombre par 10^{-n} revient à décaler la virgule de n **rangs vers la gauche** (on complète par des zéros si nécessaire).

Exemples : $208{,}641 \times \mathbf{10^2} = 20\,864{,}1$ et $37{,}1 \times \mathbf{10^{-3}} = 0{,}0371$

B Écriture scientifique

Définition Tout nombre décimal non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule, et où n est un nombre entier relatif. a est appelé **mantisse** du nombre.

Exemples :
- Âge de la Terre : 4 500 000 000 ans = $4{,}5 \times 10^9$ ans
- Rayon d'un atome : 0,000 000 000 529 m = $5{,}29 \times 10^{-10}$ m
- Distance Terre-Soleil : 149 600 000 000 m = $1{,}496 \times 10^{11}$ m
- Distance Terre-Alpha centauri : 41 800 000 000 000 km = $4{,}18 \times 10^{13}$ km

Exercices

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Donne l'écriture décimale.

a. 3^3 **c.** 1^8 **e.** 0^7 **g.** 3^4
b. 14^1 **d.** 2^4 **f.** 5^3 **h.** 19^0

2 Écris sous la forme d'une puissance.

a. $41 \times 41 \times 41 \times 41 \times 41 \times 41 \times 41$

b. $(-5) \times (-5) \times (-5)$ **c.** $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

3 Donne l'écriture décimale.

a. $(-3)^3$ **c.** -2^5 **e.** $(-11)^1$ **g.** $(-2)^5$
b. $(-12)^0$ **d.** -6^2 **f.** $(-1)^8$ **h.** -7^0

4 Regroupe les expressions égales.

3^4 $(-4)^3$ -64 12^0 7^0 81 $(-3)^4$ -8^2

5 Donne l'écriture décimale.

a. 2^{-2} **b.** 10^{-3} **c.** 5^{-1} **d.** 1^{-1}

6 Écris sous la forme d'une puissance.

a. $\frac{1}{36}$ **b.** $\frac{1}{10\,000}$ **c.** $\frac{1}{7 \times 7 \times 7}$

7 Quels sont les nombres négatifs ?

$A = (-15)^6$ $E = (-1)^3$
$B = -15^6$ $F = -5^{-4}$
$C = 15^{-6}$ $G = 12^{-2}$
$D = (-15)^{-6}$ $H = -(-3)^{-2}$

8 Donne l'écriture décimale.

a. 10^5 **c.** 10^8 **e.** 10^{-6} **g.** $(-10)^1$
b. 10^{-3} **d.** 10^0 **f.** -10^2 **h.** $(-10)^{-5}$

9 Écris à l'aide d'une puissance de 10.

a. 10 000 **b.** 0,1 **c.** 0,00001 **d.** $\frac{1}{100}$

10 Associe les quantités égales.

1 MégaOctet •	• 10^3 octets
1 KiloOctet •	• 10^9 octets
1 GigaOctet •	• 10^6 octets
1 TéraOctet •	• 10^{12} octets

11 Écris à l'aide d'une puissance de 10.

a. $10^3 \times 10^2$ **d.** $10^{-5} \times 10^3 \times 10^2$
b. $10^3 \times 10^{-4}$ **e.** 10×10^4
c. $\frac{10^5}{10^2}$ **f.** $\frac{10^{-2}}{10^{-4}}$

12 Donne l'écriture décimale.

$I = 3 \times 10^4$ $K = 177 \times 10^{-1}$
$J = 1{,}25 \times 10^3$ $L = 13 \times 10^{-4}$

13 Donne l'écriture scientifique.

$M = 21\,600$ $P = 125 \times 10^2$
$N = 0{,}012$ $Q = 72{,}5 \times 10^{-2}$

14 Range dans l'ordre croissant.

$R = 3{,}5 \times 10^{-3}$ $T = 7{,}2 \times 10^2$
$S = 2 \times 10^{-2}$ $U = 9{,}1 \times 10^{-4}$

15 **Vrai ou Faux**

P.1. $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 4^{-2}$

P.2. 3^{17} est le triple de 3^{16}.

P.3. $2 + 3^3 = 125$

P.4. $\frac{10^{10}}{10^{-3}} = 10^{13}$

P.5. $11{,}7 \times 10^{-3}$ est l'écriture scientifique d'un nombre.

Puissances d'un nombre relatif

16 Relie les expressions égales.

5^4 •	• $4 \times 4 \times 4 \times 4$
4^5 •	• $5 + 5 + 5 + 5$
5×4 •	• $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$
5^5 •	• $5 \times 5 \times 5 \times 5$
4^4 •	• $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

17 Écris sous forme d'un produit puis donne l'écriture décimale de chaque nombre.

$A = 2^5$ $\quad$ $C = 3^4$ $\quad$ $E = 12^1$

$B = 7^3$ $\quad$ $D = 4^3$ $\quad$ $F = 1^6$

18 Même consigne qu'à l'exercice précédent.

$G = 5^3$ $\quad$ $I = 2^7$ $\quad$ $K = 6^3$

$H = 0^6$ $\quad$ $J = 9^2$ $\quad$ $L = 100^4$

19 Même consigne qu'à l'exercice précédent.

a. 2^4 **c.** $0{,}1^3$ **e.** $(-3)^4$ **g.** $(-6)^3$

b. 7^2 **d.** $1{,}2^2$ **f.** -3^4 **h.** $-1{,}1^2$

20 Donne l'écriture décimale de chaque nombre.

$M = (-2)^4$ $\quad$ $P = -3^3$ $\quad$ $R = (-1)^7$

$N = -2^4$ $\quad$ $Q = (-3)^3$ $\quad$ $S = (-1)^{2\,016}$

21 Sans les calculer, détermine parmi les nombres suivants ceux qui sont négatifs.

-7^8 $\quad$ $(-6)^8$ $\quad$ $(-9)^{99}$ $\quad$ $(-4)^{20}$ $\quad$ -5^{62}

22 Sans les calculer, détermine parmi les nombres suivants ceux qui sont négatifs.

a. $(-6)^4$ **d.** $(-12)^{15}$ **g.** $-(-35)^7$

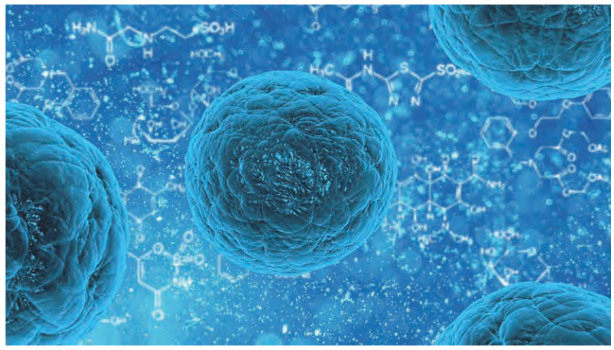
b. 6^8 **e.** $(-3)^7$ **h.** -87^4

c. -132^{51} **f.** $(-3{,}6)^{100}$ **i.** $-(-13^8)$

23 Écris T et U sous forme d'un produit puis donne leur écriture décimale.

$T = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2$ et $U = \left(\dfrac{3}{10}\right)^3$

24 Pour se reproduire, une cellule se divise en deux cellules. Chacune se divise alors en deux cellules, et ainsi de suite.



a. Combien de cellules y a-t-il après 3 divisions cellulaires ? Après 10 divisions cellulaires ?

b. En utilisant ta calculatrice, détermine au bout de combien de divisions cellulaires le nombre de cellules dépasse un million.

25 ***Puissances de 1 ou – 1***

Calcule.

a. 1^{12} **c.** $(-1)^8$ **e.** -1^7 **g.** $(-1)^9$

b. 1^0 **d.** $(-1)^0$ **f.** -1^6 **h.** -1^0

26 ***Exposants 0 ou 1***

Calcule.

a. 4^0 **c.** $(-6)^0$ **e.** $0{,}5^1$ **g.** $(-1{,}8)^1$

b. $0{,}5^1$ **d.** $1{,}2^1$ **f.** -5^1 **h.** -7^0

27 Calcule en détaillant les étapes.

$A = 5^3 + 3^2 \times 2^3$ $\quad$ $D = 5 \times 2^4$

$B = (5^3 - 3^2) \times 2^3$ $\quad$ $E = (5 \times 2)^4$

$C = -3^3 + 3^2 \times (-2)^3$ $\quad$ $F = 1^2 \times 2^3 \times 4^5$

28 Utilise ta calculatrice pour déterminer l'écriture décimale de $G = 7^4 - 3^{10} + 5 \times (-9)^4$.

29 Une ville un peu étrange comporte 4 quartiers. Chaque quartier comporte 4 immeubles de 4 étages. À chaque étage, il y a 4 appartements, chacun ayant 4 chambres. Dans chaque chambre, on trouve une commode à 4 tiroirs, et dans chaque tiroir il y a 4 paires de chaussettes.

a. Écris le nombre d'appartements existant dans cette ville sous forme d'une puissance de 4.

b. Combien y a-t-il de chaussettes en tout dans cette ville ?

30 ***Buzz***

Axel est très populaire sur un célèbre réseau social. Le nombre de personnes abonnées à son profil triple chaque semaine.

Le jour où Axel observe son profil, 3^6 abonnés le « suivent ».

a. Combien le suivront dans une semaine ?

b. Combien le suivront dans trois semaines ?

c. Combien le suivaient quinze jours auparavant ?

31 Écris chaque nombre sous forme fractionnaire comme dans l'exemple.

Exemple : $7^{-2} = \dfrac{1}{7^2} = \dfrac{1}{49}$

a. 2^{-5} **c.** 4^{-3} **e.** $0{,}5^{-3}$

b. 5^{-2} **d.** 100^{-2} **f.** 20^{-2}

32 **Vrai ou Faux**

P.1. $(-3)^{-1} = -3^{-1}$

P.2. L'inverse de 8^2 est 8^{-2}.

P.3. L'opposé de 8^2 est $(-8)^2$.

P.4. L'inverse de 2^{-1} est 0,5.

33 Utilise ta calculatrice pour ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant.

$0{,}24^{-4}$	5^{-2}	$0{,}32^{-5}$	2^{-5}	$0{,}9^{-6}$

34 **QCM**

a. $14 \times 14 \times 14 \times 14 \times 14 =$

R.1	R.2	R.3
14×5	14^5	5^{14}

b. $5 \times 2^3 =$

R.1	R.2	R.3
10^3	40	30

c. $(-3)^7 =$

R.1	R.2	R.3
-3^7	3^7	3^{-7}

d. $\dfrac{1}{9^7} =$

R.1	R.2	R.3
-9^7	$(-9)^7$	9^{-7}

Puissances de 10

35 Écris à l'aide d'une puissance de 10.

a. 10 000 ; 10 000 000 ; 1 000 000 ; 1 000.

b. cent ; cent mille ; un milliard ; mille milliards.

36 Recopie et complète le tableau.

	Écriture décimale	10^n	En toutes lettres
a.	10 000		
b.		10^6	
c.			Dix millions
d.	10		
e.		10^{11}	
f.			Un

37 Relie chaque nombre à son ordre de grandeur.

10 562,44	•		•	10^2
9 502 205	•		•	10^7
1 065 000,65	•		•	10^4
92,035	•		•	10^6

38 Effectue les calculs suivants.

$A = 10^3 + 10^2$ | $E = 10^3 + 10^5$

$B = 10^3 - 10^2$ | $F = 10^3 - 10^5$

$C = 10^3 \times 10^2$ | $G = 10^3 \times 10^5$

$D = 10^3 \div 10^2$ | $H = 10^3 \div 10^5$

39 Dans chaque cas ci-dessous, encadre le nombre donné par deux puissances de 10 d'exposants entiers consécutifs.

a. $10^{\dots} < 31\ 000 < 10^{\dots}$

b. ... < 1 510 < ...

c. ... < 56,345 < ...

d. ... < 312 000,4 < ...

e. ... < 7,34 < ...

f. ... < 3 930 000 < ...

g. ... < 82 600 334 000 < ...

40 Calcule.

a. $2 + 10^3$

b. $2 - 10^3$

c. 2×10^3

d. $(2 \times 10)^3$

41 Calcule.

a. $(10^4)^2$ | **b.** $(10^3)^3$

42 Donne, en mètres, l'ordre de grandeur de chacune des longueurs suivantes sous forme d'une puissance de 10.

a.	Distance parcourue par la lumière en 1 seconde	299 792 458 m
b.	Distance d'un marathon	42,195 km
c.	Diamètre du Soleil	1 392 684 km
d.	Distance moyenne de la Terre au Soleil	150 millions de kilomètres
e.	Hauteur d'un hyperion, l'arbre le plus haut du monde	115,5 m
f.	Diamètre de Thétys (satellite de Saturne)	1 060 km

43 ***Tiré par les cheveux...***

a. En moyenne, un individu perd environ 50 cheveux par jour. Donne un ordre de grandeur du nombre de cheveux perdus par une personne durant toute sa vie. (L'espérance de vie moyenne d'une personne en France est d'environ 80 ans.)

b. À combien de chevelures correspond ce nombre ? (En moyenne, une chevelure comporte 160 000 cheveux.)

44 Écris chacun des nombres suivants à l'aide d'une puissance de 10.

a. 0,01 ; 0,000 0001 ; 0,001.

b. un dixième ; un dix-millième ; un millionième.

c. $\frac{1}{10\,000}$; $\frac{1}{1\,000\,000}$; $\frac{1}{100\,000\,000}$.

45 Recopie et complète le tableau.

	Écriture décimale	10^n	En toutes lettres
a.	0,000 01		
b.		10^{-3}	
c.			Un centième
d.	0,1		
e.		10^{-9}	
f.			Un dix-millionième

46 Relie chaque nombre à son ordre de grandeur.

0,001 453 •	• 10^{-1}
0,000 097 •	• 10^{-2}
0,098 •	• 10^{-3}
0,010 02 •	• 10^{-4}

47 Effectue les calculs suivants.

$A = 10^{-1} + 10^{-2}$ | $C = 10^{-1} \times 10^{-2}$

$B = 10^{-1} - 10^{-2}$ | $D = 10^{-1} \div 10^{-2}$

48 Dans chaque cas ci-dessous, encadre le nombre donné par deux puissances de 10 d'exposants entiers consécutifs.

a. $10^{...} < 0{,}025 < 10^{...}$ | **d.** $... < 0{,}005 < ...$

b. $... < 0{,}000\,51 < ...$ | **e.** $... < 0{,}12 < ...$

c. $... < 0{,}7 < ...$ | **f.** $... < 0{,}000\,099 < ...$

49 Effectue les calculs suivants.

$E = 10^5 \times 10^3$ | $I = 10^4 \div 10^2$

$F = 10^4 \times 10^{-1}$ | $J = 10^3 \div 10^3$

$G = 10^3 \times 10$ | $K = 10^{-1} \div 10^2$

$H = 10^{-3} \times 10^{-2}$ | $L = 10^3 \div 10^{-2}$

50 Effectue les calculs suivants.

$M = 10^{13} \times 10^{10}$ | $R = 10^{11} \div 10^6$

$N = 10^{-12} \times 10^7$ | $S = 10 \div 10^{14}$

$P = 10^{30} \times 10^{-30}$ | $T = 10^{-12} \div 10^{-22}$

$Q = 10^{-7} \times 10^{-9}$ | $U = 10^{-7} \div 10^{-7}$

51 **QCM**

a. $10^{-5} =$

R.1	R.2	R.3
100 000	– 100 000	0,00001

b. – 0,001 =

R.1	R.2	R.3
-10^{-3}	-10^{3}	10^{3}

c. $10^5 \times 10^{-9} =$

R.1	R.2	R.3
10^{-45}	10^{-4}	10^{14}

d. $\dfrac{10^2}{10^{-5}} =$

R.1	R.2	R.3
10^{-7}	10^{-3}	10^{7}

52 Effectue mentalement les calculs suivants.

$A = 14 \times 10^3$

$B = 2 \times 10^5$

$C = 9\,452 \times 10^2$

$D = 369 \times 10^6$

$E = 3,5 \times 10^9$

$F = 44,44 \times 10^4$

$G = 0,002 \times 10^5$

$H = 0,048 \times 10^2$

53 Effectue mentalement les calculs suivants.

$I = 2\,140 \times 10^{-3}$

$J = 8 \times 10^{-1}$

$K = 75 \times 10^{-2}$

$L = 9\,287 \times 10^{-5}$

$M = 108\,460,5 \times 10^{-4}$

$N = 44,44 \times 10^{-4}$

$P = 10,01 \times 10^{-1}$

$Q = 7 \times 10^{-4}$

54 Effectue mentalement les calculs suivants.

$R = 4\,600 \div 10^2$

$S = 140\,000 \div 10^3$

$T = 9\,500\,000\,000 \div 10^6$

$U = 66 \div 10^2$

$V = 5,3 \div 10^2$

$W = 23,1 \div 10^3$

$X = 5\,000 \div 10^4$

$Y = 0,4 \div 10^2$

55 Relie chaque calcul à l'ordre de grandeur de son résultat.

$2,945\,2 \times 10^4$	•		•	3
$29\,452 \times 10^{-2}$	•		•	300
$29,452 \times 10^{-1}$	•		•	3 000
$0,294\,52 \times 10^4$	•		•	30 000

56 Pour convertir 3 hm en mm, Nabil a écrit :

3hm = 3 × 10² m
= 3 × 10² × 10³mm = 3 × 10⁵ mm
donc 3 hm = 300 000 mm

Procède d'une manière analogue pour effectuer les conversions suivantes.

a. 103,4 daL en mL

b. 0,02 km en cm

c. 78,45 kg en dg

d. 16 t en g

e. 5,678 dam en µm

f. 25 cg en kg

57 Donne l'écriture décimale de chaque nombre.

$A = 8 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

$B = 5 \times 10^9 + 4 \times 10^6 + 6 \times 10^5 + 2 \times 10^3$

$C = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 8 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2}$

$D = 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^3 + 6 \times 10^0 + 7 \times 10^2$

$E = 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3}$

58 Décompose chaque nombre à l'aide de puissances de 10, comme à l'exercice précédent.

F = 8 549

G = 10 500

H = 1 208,05

I = 110,001

J = 9 999 999 999

K = 0, 460 598

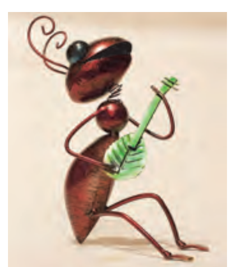
59 ***Minuscules !***

Diamètre d'un cheveu	100 µm
Taille du virus de la grippe	100 nm
Taille d'une bactérie	3 µm
Rayon d'un atome	0,1 nm
Taille d'une fourmi	2,5 mm
Longueur de la trompe d'un moustique	1 µm

a. Donne, en mètre, l'ordre de grandeur de chaque longueur sous forme d'une puissance de 10.

b. Range alors les éléments de la première colonne du tableau dans l'ordre décroissant de leur taille.

c. Combien faudrait-il aligner de virus de la grippe pour obtenir la longueur d'une fourmi ?



60 Recopie et complète par la puissance de 10 qui convient.

a. $6\,230 = 623 \times \dots = 62{,}3 \times \dots = 6{,}23 \times \dots$

b. $0{,}004\,5 = 0{,}045 \times \dots = 0{,}45 \times \dots = 4{,}5 \times \dots$

61 Recopie et complète, sachant que chaque nombre vaut 51,76.

$5{,}176 \times 10^{\dots}$	$0{,}5176 \times 10^{\dots}$	$517\,600 \times 10^{\dots}$
$517{,}6 \times 10^{\dots}$	$51{,}76 \times 10^{\dots}$	$5\,176 \times 10^{\dots}$

62 Recopie et complète les égalités.

a. $27\,390 = \dots \times 10^{3}$

b. $84\,000 = 84 \times 10^{\dots}$

c. $16{,}52 = \dots \times 10^{-2}$

d. $0{,}054 = 54 \times 10^{\dots}$

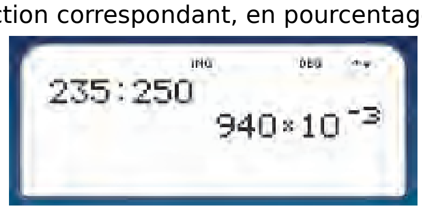
e. $0{,}003 = \dots \times 10^{-2}$

f. $2\,016 = 20\,160 \times 10^{\dots}$

63 Marina doit évaluer le nombre annuel de visiteurs d'un site Internet, dont la fréquentation moyenne est de 2 600 visites par jour.

a. Elle utilise pour cela sa calculatrice. Comment interprètes-tu le résultat affiché à l'écran ?

b. Selon une enquête auprès de 250 visiteurs du site, 235 d'entre eux apprécient l'aspect graphique du site. Marina prend à nouveau sa calculatrice pour déterminer le taux de satisfaction correspondant, en pourcentage.



Interprète à nouveau le résultat affiché à l'écran.

Notation scientifique

64 Parmi les nombres suivants, quels sont ceux écrits en notation scientifique ?

a. $5{,}23 \times 10^{12}$

b. $72{,}43 \times 10^{-8}$

c. $2{,}45 \times 100^{-9}$

d. $-1{,}47 \times 10^{6}$

e. $0{,}251 \times 10^{3}$

f. $-7{,}6$

65 Associe à chaque nombre de gauche son écriture scientifique.

45,68	•	•	$4{,}568 \times 10^{-1}$
456,8	•	•	$4{,}568 \times 10^{1}$
0,456 8	•	•	$4{,}568 \times 10^{-3}$
0,004 568	•	•	$4{,}568 \times 10^{2}$

66 **QCM**

a. Quel nombre est en écriture scientifique ?

R.1	R.2	R.3
$0{,}08 \times 10^{-2}$	$3{,}7 \times 10^{-7}$	14×10^{9}

b. L'écriture scientifique de 31 200 est...

R.1	R.2	R.3
$31{,}2 \times 10^{3}$	$3{,}12 \times 10^{4}$	$3{,}12 \times 10^{-4}$

c. L'écriture scientifique de 0,087 est...

R.1	R.2	R.3
87×10^{-3}	$8{,}7 \times 10^{2}$	$8{,}7 \times 10^{-2}$

67 Donne l'écriture scientifique de chaque nombre ci-dessous.

a. 7 283

b. 25 000

c. 654,98

d. 12,47

e. 0,005 8

f. 0,000 149

g. $0{,}67 \times 10^{2}$

h. 159×10^{-5}

i. $0{,}009 \times 10^{-7}$

68 Écris ces nombres en notation scientifique, puis range-les dans l'ordre croissant.

13 589	$130{,}28 \times 10^{3}$	$0{,}035\,6 \times 10^{6}$
$0{,}094 \times 10^{5}$	201 000	$720\,000 \times 10^{-2}$

69 Donne l'écriture scientifique de chaque nombre ci-dessous, en utilisant la calculatrice.

a. 2^{-14}

b. 17^{9}

c. 8^{-7}

d. 3^{-10}

e. $(-11)^{9}$

f. $(-1{,}2)^{-6}$

g. -4^{-10}

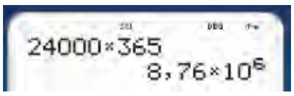
h. $0{,}6^{11}$

70 Exprime chaque grandeur ci-dessous en écriture scientifique.

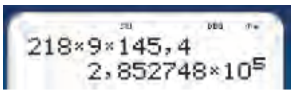
Population française (2015)	66 millions d'habitants
Population mondiale (2015)	7,35 milliards d'habitants
Diamètre de la Terre	40 075 km
Diamètre du Soleil	$1\ 392 \times 10^{3}$ km
Vitesse de la lumière	300 000 km/s
Vitesse du son dans l'air	0,34 km/s

71 Zoé a utilisé sa calculatrice, réglée en mode scientifique, pour effectuer plusieurs calculs. Donne l'écriture décimale de chaque résultat.

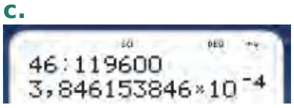
a.



b.



c.



d.

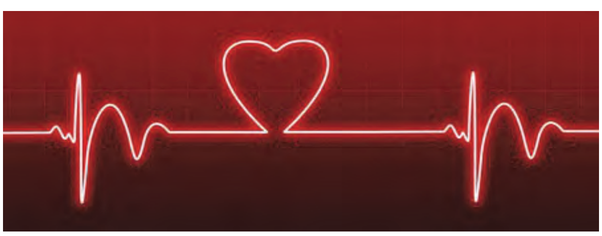
72 Afin de sauvegarder ses photos, Jocelyne vient de s'équiper d'un disque dur d'une capacité de 2 To (TéraOctets, soit 2 mille milliards d'octets). Le poids moyen d'une photo est d'environ 3 Mo (MégaOctets, soit 3 millions d'octets). Combien de photos Jocelyne pourra-t-elle stocker sur son disque dur ?

73 ***Perte de neurones***

Le cerveau humain est composé de 100 milliards de neurones. À partir de 30 ans, ce nombre de neurones baisse d'environ 100 000 par jour. En considérant qu'une année contient 365 jours, donne l'écriture décimale, puis scientifique, du nombre de neurones d'un humain de 40 ans.

74 Le cœur humain effectue environ 5 000 battements par heure.

Donne un ordre de grandeur du nombre de battements effectués pendant une vie de 80 ans. Exprime le résultat en notation scientifique.



75 Une puce souhaite se balader sur la Lune ! Pour y aller, elle rêve de faire la courte-échelle avec ses copines. La Lune est située à environ 384 000 km de la Terre, et une puce mesure en moyenne 5 mm. Combien de copines doit-elle convaincre ?

76 La lumière est composée de photons qui se déplacent à la vitesse moyenne de 300 000 km par seconde. Une année-lumière est une unité de longueur : c'est la distance parcourue par un de ces photons en une année.

a. À quelle distance en km correspond une année-lumière ? Tu écriras la réponse en notation scientifique.

b. La distance du centre du Soleil au centre de la Terre est $1{,}5 \times 10^{8}$ km. Exprime cette distance en années-lumière.

c. Proxima du Centaure est l'étoile la plus proche de notre système solaire : elle se trouve à environ 4,22 années-lumière. Convertis cette distance en kilomètres. Donne le résultat en écriture scientifique.

77 Donne un encadrement par deux puissances de 10 consécutives...

a. en nombre d'années, de l'âge de la Terre qui est d'environ 4,5 milliards d'années.

b. en mètre, de la largeur d'une bactérie qui peut atteindre 3 µm.

c. en Hertz, de la fréquence d'un processeur tournant à 4,1 GHz.

78 Range les planètes suivantes dans l'ordre croissant de leur masse (exprimée en kg).

Mercure	$3{,}302 \times 10^{23}$	Vénus	$4{,}8685 \times 10^{24}$
Terre	$5{,}973 \times 10^{24}$	Mars	$6{,}4185 \times 10^{23}$
Jupiter	$1{,}8986 \times 10^{27}$	Saturne	$5{,}6846 \times 10^{26}$
Uranus	$8{,}6832 \times 10^{25}$	Neptune	$1{,}0243 \times 10^{26}$

79 Calcule et donne le résultat sous la forme d'une écriture scientifique, puis décimale.

a. $40 \times 10^3 \times 6 \times 10^2$

b. $150 \times 10^3 \times 8 \times 10^5$

c. $3 \times 10^8 \times 4 \times 10^{-5}$

d. $2 \times 10^9 \times 7 \times 10^{-6}$

e. $3 \times 10^2 \times 1{,}2 \times 10^{-5}$

f. $5 \times 10^2 \times 0{,}3 \times 10^{-6}$

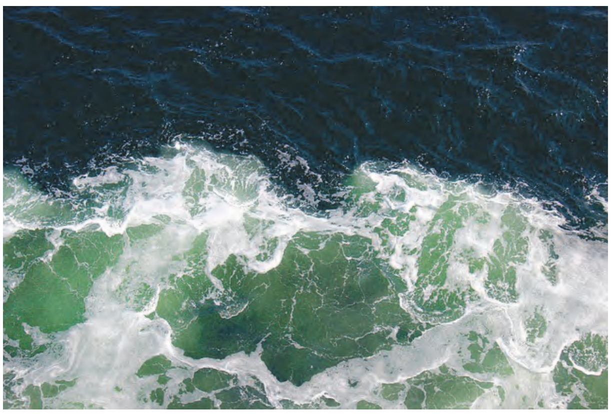
80 ***Sel de mer***

On estime que les mers et océans sur Terre occupent un volume de 1 340 millions de km^3. Leur salinité moyenne est d'environ 35 grammes par litre. Cela signifie qu'un litre d'eau de mer contient en moyenne 35 g de sel.

a. Explique pourquoi un kilomètre-cube est parfois appelé un **téralitre**.
(**Rappel :** 1 L = 1 dm^3)

b. Calcule, en tonnes, la masse de sel que contient l'ensemble des mers et océans.

c. On appelle **exalitre** la quantité 10^{18} litres. Convertis le volume total d'eau de mer sur la planète en exalitres.



81 ***Développement durable***

Un sac, ou un gobelet en plastique, met environ 450 ans à se dégrader complètement...

En France, on estime que 126 gobelets en plastique sont utilisés chaque seconde, en moyenne, au travers des distributeurs de boissons et fontaines à eau.

a. Donne un ordre de grandeur, exprimé en notation scientifique, du nombre de gobelets utilisés en France depuis la rentrée des classes.

b. Aux États-Unis, on estime que 60 000 sacs en plastique sont utilisés toutes les cinq secondes. Donne un ordre de grandeur du nombre de sacs en plastique utilisés aux États-Unis ces dix dernières années.

82 **Vrai ou Faux**

P.1. Une puissance d'exposant négatif est toujours négative.

P.2. Si j'élève un nombre au carré puis que j'élève le résultat au cube, c'est comme si j'avais élevé le nombre de départ à la puissance 6.

P.3. 3^{15} est le triple de 3^5.

P.4. Une puissance d'exposant négatif est toujours inférieure à 1.

P.5. Tous les nombres décimaux ont une écriture scientifique.

83 Écris chaque nombre ci-dessous sous la forme d'une fraction simplifiée.

$A = \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$B = \left(\frac{-1}{4}\right)^3$

$C = -\left(\frac{-3}{10}\right)^5$

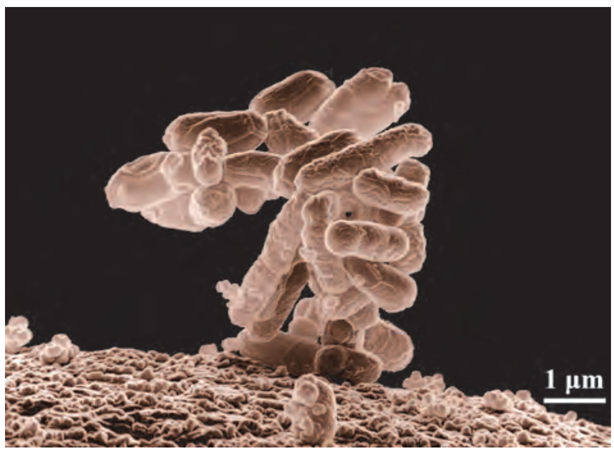
$D = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$E = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$

$F = \left(\frac{-1}{2}\right)^{-4}$

84 ***La bactérie Escherichia coli***

Également appelée colibacille, cette bactérie est présente dans l'intestin de l'homme et de nombreux animaux.



a. Un micromètre, noté 1 µm , vaut 10^{-6} m. Donne l'écriture décimale d'un micromètre exprimé en mètre.

b. Grâce à l'unité indiquée sur la photographie, retrouve l'échelle de ce grossissement : $\times 10^4$. Mesure la taille de cette bactérie (un bâtonnet) sur la photographie et déduis-en la taille réelle de la bactérie, en mètre.

c. Dans un milieu riche, à 37°C, une population de cette bactérie peut doubler en 20 minutes. Dans ces conditions optimales, combien de bactéries peut-on obtenir, en une journée, à partir d'une population initiale de 100 individus ? Après combien de temps cette population dépasse-t-elle le million d'individus ?

Système binaire

On souhaite écrire des nombres à l'aide des quantités figurant dans la première ligne du tableau.

...	...	...	1 024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
										•	•		•
								•			•	•	

La 2^e^ ligne du tableau montre comment fabriquer le nombre 13 : 13 = 8 + 4 + 1.

a. Comment s'obtiennent les quantités situées dans la première ligne du tableau ? Complète les trois cases de cette ligne.

b. À quel nombre correspond la 3^e^ ligne du tableau ?

c. Explique comment fabriquer de la même manière : tous les nombres entiers de 1 à 16 ; le nombre 50 ; le nombre 300. (On ne peut pas mettre plus d'un point noir par case.)

d. La deuxième ligne du tableau peut être codée par : **1101**. C'est ce qu'on appelle l'**écriture binaire** du nombre 13. De même, l'écriture binaire du nombre de la ligne suivante est **100110**. Quelle est l'écriture binaire du nombre 50 ? Et celle de 300 ?

e. Donne l'écriture décimale du nombre s'écrivant **1000** en binaire, puis celle de **101010**.

f. Code en binaire la date d'aujourd'hui (jour / mois / année).

*Le système binaire (base 2) est le système de numération utilisé en informatique, où toute donnée est traduite par un nombre dont l'écriture ne contient que des **1** et des **0**.*

g. Un **octet** est l'unité de stockage de base dans un ordinateur. Il est constitué de huit cellules élémentaires pouvant valoir **0** ou **1**. Combien existe-t-il d'octets différents ?

h. Un mot est constitué de deux octets. Combien existe-t-il de mots différents ?

La loi de Moore

La **loi de Moore** est une conjecture, énoncée en 1965 par Gordon Earle Moore. Cette loi annonce que la puissance des ordinateurs, caractérisée par le nombre de transistors que comportent leurs circuits intégrés, est doublée tous les deux ans. Le tableau suivant donne le nombre de transistors de certains circuits intégrés, et leur date de création.

Processeur	4004	Intel 386	Intel 486	Pentium	Athlon	ATI Radeon HD6900
Année	1971	1985	1989	1993	1999	2011
Nombre de transistors	2 300	275 000	1,16 millions	3,1 millions	37 millions	2,64 milliards

a. Selon la loi de Moore, par quel nombre devait être multiplié le nombre de transistors entre 1971 et 1985 ? Cela correspond-il à la réalité observée ?

b. Même question pour la période allant de 1971 à 1989, puis pour la période de 1971 à 1999, et enfin pour celle de 1971 à 2011.

c. Explique pourquoi on peut dire que doubler 10 fois de suite revient à peu près à multiplier par 1 000. Déduis-en le nombre de transistors auquel on pouvait s'attendre en 1991 selon la prédiction de Moore.

d. En 2015, le processeur Xéon à 18 cœurs comporte 5,6 milliards de transistors. Ce nombre est-il en accord avec la loi de Moore ?

e. Penses-tu que la loi de Moore restera valable dans le siècle qui vient ? Explique.

N4

Puissances

Activités

1 Distributivité

Cours : 1

a Fans de musique, Célia et Ludwig ont inventé une machine magique : la Clip-Box ! Ils testent quatre prototypes, chacun contenant 3 DVD et 5 CD. Exprime, de deux façons différentes, le nombre de disques contenus dans l'ensemble de toutes les machines. Quelle égalité peux-tu en déduire ?

b On suppose maintenant que le nombre de Clip-Box est égal à k. On sait que chaque machine contient un nombre de CD et un nombre de DVD identiques. Choisis deux lettres pour désigner le nombre de DVD et le nombre de CD par machine. Exprime, de deux façons différentes, le nombre de disques contenus dans l'ensemble de toutes les machines. Quelle égalité peux-tu en déduire ?

2 Tour de magie ?

Cours : 1

Harry présente un tour de magie à son ami Jim. Il lui demande de choisir secrètement un nombre entier entre -99 et $+99$, et de faire successivement les calculs suivants : multiplier par 2, soustraire 1, multiplier le résultat obtenu par 50, ajouter le nombre initial, et enfin ajouter 50 au résultat obtenu.
Jim garde le résultat final pour lui mais en révèle juste le premier chiffre et le dernier chiffre (le chiffre des unités) à Harry. Ce dernier annonce alors fièrement le nombre choisi initialement par Jim.

a Écris le déroulement du tour de magie pour quelques nombres. Comment déterminer le nombre initial quand on connait le dernier chiffre et le premier chiffre du résultat final ?

b Hermione affirme qu'il n'y aucune magie dans ce tour, car il suffit, dit-elle, d'écrire les étapes de calcul en désignant le nombre initial par la lettre x. Elle explique alors que l'expression finale obtenue permet d'expliquer le "tour de magie". Qu'en penses-tu ?

3 Réduire ou ne pas réduire ?

Cours : 2

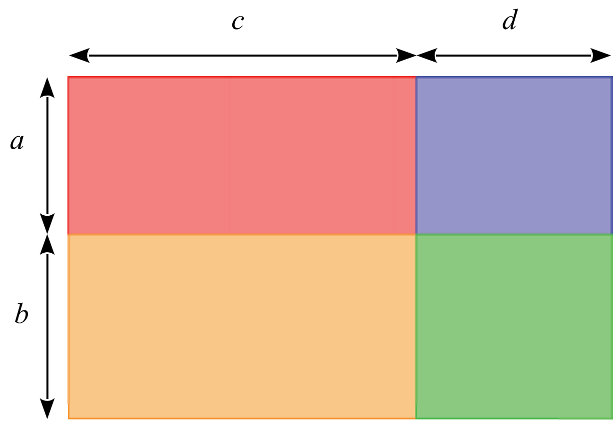
a Luc affirme que $4 + 3x = 7x$. Il explique cela en disant que, lorsque x est égal à 1, alors les deux membres sont égaux à 7. Il se trompe mais comment peut-on lui expliquer son erreur ?

b Luc semble avoir compris. En tout cas, précise-t-il, on peut réduire la longueur de l'expression $4 + 3x + 6 - 7x$, ce qui donne $3x + 10 - 7x$. Qu'en penses-tu ? Peut-on réduire davantage cette expression ?

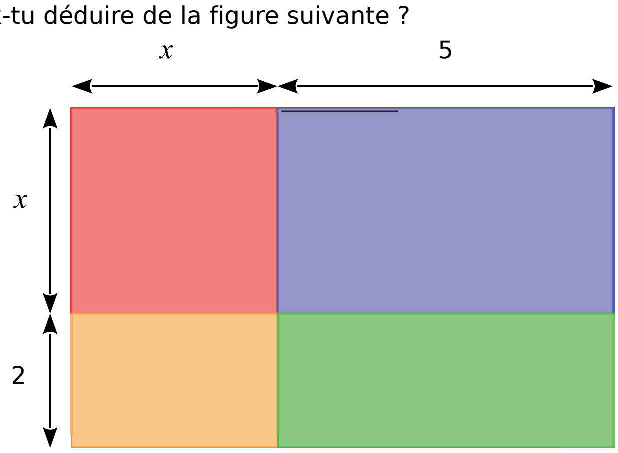
4 Double distributivité

Cours : 3

a Exprime l'aire du grand rectangle en fonction des aires des quatre petits rectangles. Quelle égalité peux-tu en déduire ?



b Quelle égalité peux-tu déduire de la figure suivante ?



1 Distributivité

→ 29 16

A Développement

Définition Développer une expression, c'est l'écrire sous la forme d'une somme algébrique.

Propriété Pour tous nombres relatifs k, a et b :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Exemples 1 : On peut calculer les expressions suivantes de deux façons différentes.

$3 \times (5 + 7)$

- $3 \times (5 + 7)$
  $= 3 \times 12$
  $= 36$
- $3 \times (5 + 7)$
  $= 3 \times 5 + 3 \times 7$
  $= 15 + 21$
  $= 36$

$-6 \times (4 - 8)$

- $-6 \times (4 - 8)$
  $= -6 \times (-4)$
  $= 24$
- $-6 \times (4 - 8)$
  $= (-6) \times 4 - (-6) \times 8$
  $= -24 - (-48)$
  $= 24$

Exemples 2 : On souhaite développer chacune des expressions suivantes.

$A = 7(x + 3)$	$B = -3{,}5(y - 2)$	$C = 3z(5 + z)$	
$A = 7 \times (x + 3)$	$B = -3{,}5 \times (y - 2)$	$C = 3z \times (5 + z)$	→ On replace le signe ×.
$A = 7 \times x + 7 \times 3$	$B = (-3{,}5) \times y - (-3{,}5) \times 2$	$C = 3z \times 5 + 3z \times z$	→ On distribue.
$A = 7x + 21$	$B = -3{,}5y + 7$	$C = 15z + 3z^2$	→ On calcule et on simplifie.

B Factorisation

Définition Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

Propriété Pour tous nombres relatifs k, a et b :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$

$$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$$

Exemples : On veut factoriser chacune des expressions suivantes.

$D = 14x - 21$	$E = -6y + 15y^2$	
$D = 7 \times 2x - 7 \times 3$	$E = 3y \times (-2) + 3y \times 5y$	→ On met en évidence le facteur commun.
$D = 7 \times (2x - 3)$	$E = 3y \times (-2 + 5y)$	→ On met en facteur ce nombre puis on regroupe les facteurs restants.
$D = 7(2x - 3)$	$E = 3y(-2 + 5y)$	→ On supprime le signe ×.

Forme factorisée		Forme développée
$7(2x - 3)$	On développe →	$14x - 21$
$3y(-2 + 5y)$	← On factorise	$-6y + 15y^2$

2 Simplifier une expression

→ 53

A Réduire une expression littérale

Définition Réduire une expression littérale, c'est l'écrire sous la forme d'une somme comportant le moins de termes possibles.

Exemples : On veut réduire chacune des expressions suivantes.

F = $3x - 8 + 2x$	G = $5x^2 + 7x - 4 - 2x^2 + 3 + 4x$		
F = $3x + 2x - 8$	G = $5x^2 - 2x^2 + 7x + 4x - 4 + 3$	⟶	On regroupe les termes.
F = $x(3 + 2) - 8$	G = $(5 - 2)\,x^2 + (7 + 4)\,x - 1$	⟶	On factorise les termes en x et en x^2.
F = $5x - 8$	G = $3x^2 + 11x - 1$	⟶	On simplifie.

B Supprimer les parenthèses

Propriété **L'opposé d'une somme algébrique** est égal à la somme des opposés de chacun de ses termes.

Exemple : On veut supprimer les parenthèses dans l'expression H = $3x - (-2x^2 - 5x + 4)$.

H = $3x - (-2x^2 - 5x + 4)$

H = $3x + (+2x^2) + (+5x) + (-4)$ ⟶ On additionne les **opposés**.

H = $3x + 2x^2 + 5x - 4$ ⟶ On simplifie l'expression.

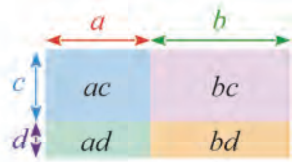
H = $2x^2 + 8x - 4$ ⟶ On réduit.

3 Double distributivité

→ 58

Propriété Pour tous nombres relatifs a, b, c et d :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$



Exemples : On veut développer, puis réduire chacune des expressions suivantes.

I = $(3x + 1)(x + 4)$ ⟶ On applique la double distributivité.

I = $3x \times x + 3x \times 4 + 1 \times x + 1 \times 4$ ⟶ On calcule les produits.

I = $3x^2 + 12x + x + 4$ ⟶ On simplifie.

I = $3x^2 + 13x + 4$ ⟶ On réduit.

J = $(-3x + 5)(2x - 4)$

J = $(-3x) \times 2x + (-3x) \times (-4) + 5 \times 2x + 5 \times (-4)$

J = $-6x^2 + 12x + 10x + (-20)$

J = $-6x^2 + 22x - 20$

Exercices

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Développe les expressions suivantes.

$A = 5(x + 1)$ | $D = 8(-5 + 2y)$

$B = 3(2 - y)$ | $E = (3x - 1) \times 7$

$C = -4(z - 8)$ | $F = -3(-4 - 5z)$

2 Associe les expressions égales.

$4(x - 1)$ •		• $-4x - 4$
$-4(x - 1)$ •		• $4x + 4$
$-4(x + 1)$ •		• $-4x + 4$
$-4(-x - 1)$ •		• $4x - 4$

3 Calcule mentalement.

a. $37 \times 101 = 37 \times (100 + 1)$

b. 51×19

c. $2{,}1 \times 11$

d. 17×99

4 Sachant que $33 \times 23 = 759$ et que $33 \times 6 = 198$, calcule mentalement.

a. 33×29 | **b.** 33×17

5 Développe les expressions suivantes.

$G = y(y + 1)$ | $I = -2t(5 - t)$

$H = 7x(2 - x)$ | $J = (5 - 2z) \times 4z$

6 Factorise les expressions suivantes.

$K = 4 \times x + 4 \times 2$ | $M = 14 - 2x$

$L = 8t + 24$ | $N = 3 - 27x$

7 Calcule mentalement.

a. $33{,}1 \times 4{,}9 + 33{,}1 \times 5{,}1 = 33{,}1 \times (...) =$

b. $269 \times 10{,}7 - 10{,}7 \times 69$

8 Associe les expressions égales.

$7 - (2x - 3)$ •		• $7 - 2x - 3$
$-7 - (-2x - 3)$ •		• $7 - 2x + 3$
$7 - (2x + 3)$ •		• $-7 + 2x + 3$
$-7 - (-2x + 3)$ •		• $-7 + 2x - 3$

9 Réduis les expressions suivantes.

a. $7t + 5t$

b. $2x - 10x$

c. $-3x + 11x$

d. $-5x^2 - 2x^2$

10 Réduis les expressions suivantes.

a. $12x - 3 + 2x + 5$ | **b.** $2y^2 + 5y - 2y - 4y^2$

11 Développe et réduis.

$P = (x + 5)(x + 1)$ | $R = (y + 3)(2y - 4)$

12 On considère l'expression S écrite sous trois formes différentes :

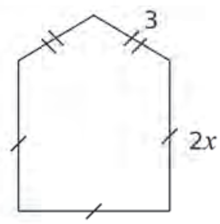
La forme initiale : $S = (x - 5)^2 + 8x - 40$

La forme réduite : $S = x^2 - 2x - 15$

La forme factorisée : $S = (x - 5)(x + 3)$

Utilise la forme la plus adaptée pour déterminer la valeur de S lorsque $x = 5$, $x = 0$ et $x = -3$.

13 Détermine le périmètre de la figure ci-contre en fonction de x.



14 **Vrai ou Faux**

P.1. $5(1 - y) = 51 - 5y$

P.2. Pour multiplier un nombre par 9, je le multiplie par 10 et je retire 1 au résultat.

P.3. $14x - 2 - x = 13x - 2$

P.4. Pour multiplier un nombre par 101, je le multiplie par 100 et je l'ajoute au résultat.

Développer

15 Développe les expressions suivantes.

A = $3 \times (x + 2)$ | C = $4(x + 1)$

B = $(x + 6) \times 7$ | D = $8(2 + x)$

16 Développe les expressions suivantes.

E = $9 \times (x - 3)$ | G = $7(x - 8)$

F = $4 \times (5 - x)$ | H = $6(9 - x)$

17 Développe les expressions suivantes.

I = $-8(x - 5)$ | K = $-7(-x + 7)$

J = $4(-x - 7)$ | L = $-9(-x - 3)$

18 Développe les expressions suivantes.

M = $7(2z - 3)$ | P = $-8(-5 - 3y)$

N = $6(4x - 9)$ | Q = $-12(-5 + 3z)$

19 Développe les expressions suivantes.

R = $x(x + 2)$ | T = $3y(y + 5)$

S = $t(t - 6)$ | U = $6z(2 + 9z)$

20 Développe les expressions suivantes.

V = $-6x(2x - 7)$ | X = $-8z(4 - 3z)$

W = $(3t + 2) \times 8t$ | Y = $3y(-4 + 6y)$

21 Associe les expressions égales.

$4x(x - 2)$ •	• $4(-x^2 - 2x)$
$4(x - 2)$ •	• $4(x^2 - 2x)$
$-4x(x + 2)$ •	• $8(0{,}5x + 1)$
$-4(-x - 2)$ •	• $2(2x - 4)$

22 Calcule astucieusement.

a. 47×101 | **c.** $101 \times 2{,}3$

b. $1\,001 \times 17$ | **d.** $0{,}18 \times 1001$

23 Calcule astucieusement.

a. 9×89 | **c.** $999 \times 3{,}7$

b. 17×99 | **d.** $1{,}8 \times 990$

24 ***Des compositions !***

a. Recopie puis calcule.

• $127 \times 2 = ...$ • $127 \times 5 = ...$ • $127 \times 7 = ...$

b. Utilise les égalités précédentes pour trouver les résultats des produits ci-dessous, en n'utilisant que des multiplications par 10 ou 100 et des additions.

A = 127×70 | E = 127×205

B = 127×200 | F = 127×527

C = 127×27 | G = 127×755

D = 127×75 | H = 127×777

25 Un commerçant reçoit douze caisses contenant des œufs protégés par du carton. Chaque caisse vide pèse 1,5 kg et contient 200 g de carton. Calcule de deux façons différentes la masse totale d'emballage.

26 Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre x ;
- Multiplier ce nombre par 5 ;
- Ajouter 7 ;
- Prendre le double du résultat ;
- Enlever 14.

Mathilde dit qu'à la seule annonce du résultat, elle est capable de retrouver très vite le nombre choisi. Comment fait-elle ?

27 **QCM**

a. $7 \times (x + 9) =$

R.1	R.2	R.3
$7 \times x + 7 \times 9$	$7 \times x + 9$	$7 \times x + x \times 9$

b. $-5(2z - 1) =$

R.1	R.2	R.3
$-10z - 1$	$-10z + 5$	$-10z - 5$

c. $83 \times 101 =$

R.1	R.2	R.3
8 300 + 1	8 300 + 83	8 300 – 83

Factoriser et réduire

28 Factorise les expressions suivantes.

A = $3 \times x + 3 \times 11$	C = $5x + 25$
B = $9 \times x + 9 \times 8$	D = $9x + 6$

29 Factorise les expressions suivantes.

E = $9 - 72x$	G = $-6x - 18$
F = $12 - 8x$	H = $42 - 14x$

30 Factorise les expressions suivantes.

I = $5{,}5 - 11a$	K = $-2{,}1z + 6{,}3$
J = $-0{,}7 + 7x$	L = $0{,}5b + 0{,}5$

31 Factorise les expressions suivantes.

M = $3x^2 + x$	P = $-x + 3x^2$
N = $8t^2 + 2t$	Q = $3y^2 + 9y^2$

32 Factorise les expressions suivantes.

R = $4x^2 + 4x + 4$	T = $9y^2 - 3y + 27$
S = $-5x^2 + 10x + 15$	U = $3y^3 + y^2$

33 Factorise les expressions suivantes.

V = $8x + 12y$	Y = $15xy + 30xz$
W = $24x + 30y - 18z$	Z = $25x^2y - 15xy^2$

34 Quelles sont les expressions factorisées ?

a. $4x^2 + 8x + 4$	**d.** $3x + 6$
b. $3(x - 5)$	**e.** $4x(x + 2)$
c. $x + (3x + 2)$	**f.** $3x - (x - 4)$

35 Calcule astucieusement.

a. $57 \times 99 + 57 \times 1$

b. $212 \times 1003 - 212 \times 3$

c. $177 \times 5 + 177 \times 2 + 177 \times 3$

36 Calcule astucieusement.

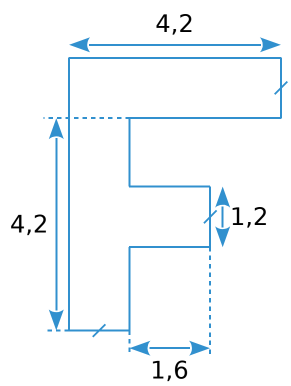
a. $13 \times 5{,}9 + 13 \times 4{,}1$

b. $157 \times 0{,}7 - 0{,}7 \times 52 - 5 \times 0{,}7$

37 Agathe achète 7 cahiers à 3,50 € l'un, 7 crayons à 0,50 € l'un et 7 feutres à 1,10 € l'un. Calcule de deux façons différentes le prix total de ses achats.

38 Les mesures ci-contre sont données en cm. Après avoir calculé de tête, Marco dit que l'aire de cette figure est de 12 cm².

Réfléchis puis explique comment Marco a fait.



39 Réduis les expressions suivantes.

a. $5x + 3x$	**c.** $-4x + 15x$
b. $3x - 8x$	**d.** $-9x - 6x$

40 Réduis les expressions suivantes.

a. $2x + 7x - 5x$	**d.** $18z^2 - 9z^2 + 3z^2$
b. $8xy - 7xy$	**e.** $a^3 + a^3 + a^3$
c. $5ab - 9ab + ab$	**f.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x$

41 Associe les expressions égales.

$4x + 5 + 2x$ •	• $9x + 2$
$-4x + 5 + 2x$ •	• $6x + 5$
$4x - 5 - 2x$ •	• $-2x + 5$
$-4x - 5 + 2x$ •	• $-2x - 5$
$4x + 5x + 2$ •	• $2x - 5$

42 Simplifie lorsque c'est possible.

a. $x + x$
b. $x \times x$
c. $2x + x$
d. $3x + 2$
e. $2x \times x$
f. $x^2 + x$
g. $0 \times x$
h. $1 + 2x$
i. $0 + x$
j. $5x \times 6x$
k. $4 \times x \times 5$
l. $x \times x + x$

43 Réduis lorsque c'est possible.

a. $12x - y + 2$
b. $7y + 12 - 13y$
c. $10 - 8d + 3$
d. $8 - x + x^2 + 5x$
e. $3t - 12t + t^2 - 7$
f. $a^2 + b - a + 3b$

44 Réduis les expressions suivantes.

$A = 16x + 7 - 9x + 2$

$B = 5z + 4{,}5 - z + 0{,}5$

$C = 3 + 4t + 12t - 7t - 3$

$D = 5x^2 + 4 + 2x^2 - 1$

$E = 15t^2 - 4t^2 + 2t^2 + 9$

$F = 12x + 8x^2 - 9x - x^2$

45 Réduis les expressions suivantes.

$G = 5x^2 + 1 + 3x + 14 + 2x^2 + 1$

$H = 6 + 6x + 8x^2 - 9x - x^2 + 4$

$I = 9x^2 - xy + 17 + 4y^2 + 5xy - 8x^2 - 11$

46 Réduis les expressions suivantes.

a. $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{x}{4}$
b. $\dfrac{5x}{6} + \dfrac{x-4}{3}$
c. $3 + \dfrac{x-1}{5}$
d. $-5x - \dfrac{3x-2}{4} + 3$

47 **QCM**

a. $25 - 5x =$

R.1	R.2	R.3
$5(x - 5)$	$x(x - 5)$	$5(5 - x)$

b. $11x + 3 - 9x - 7 =$

R.1	R.2	R.3
$2x - 4$	$14x - 16$	$-2x$

c. $33 \times 98 + 33 \times 2 =$

R.1	R.2	R.3
98×100	66×100	33×100

48 On souhaite démontrer que la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

a. Vérifie cette affirmation sur des exemples.

b. Explique pourquoi un nombre pair peut s'écrire sous la forme $2n$, où n est un entier.

c. Exprime la somme de deux nombres pairs $2n$ et $2p$, en fonction de n et p entiers.

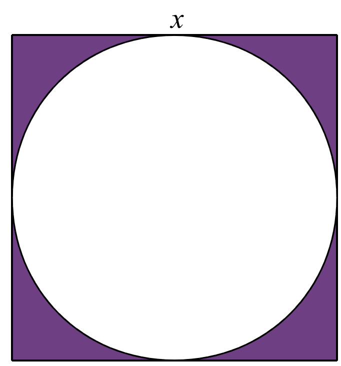
d. Conclus.

49 Marie dit qu'en ajoutant deux nombres impairs, on obtient toujours un nombre impair.

a. Prouve que ce n'est pas juste en lui donnant un contre-exemple.

b. Démontre que la somme de deux nombres impairs n'est jamais impaire (tu pourras t'inspirer de l'exercice **48**).

50 La figure suivante est composée d'un carré de côté x et d'un disque tangent à ce carré.



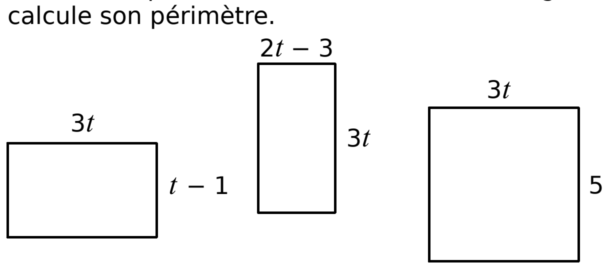
a. Pour $x = 6$, reproduis cette figure puis calcule l'aire de la partie violette.

b. Exprime l'aire du carré en fonction de x.

c. Exprime l'aire du disque en fonction de x.

d. Exprime alors l'aire de la partie violette en fonction de x. Factorise puis réduis cette expression.

51 Est-il possible de former un unique rectangle en accolant les trois rectangles ci-dessous ?
Si oui, indique les dimensions de ce rectangle et calcule son périmètre.



Développer et réduire

52 Développe puis réduis chaque expression.

$A = 3(x + 6) + 2$

$B = 4 + 3(2y - 2)$

$C = 7(2x + 2) - 6$

$D = 9(x - 6) + 2x$

$E = 3{,}5(2 - x) + 8{,}2$

$F = 2(3 + 5x) + 8(7 - x) + 4(x - 1)$

53 Développe puis réduis chaque expression.

$G = x(x + 6) - x$ | $I = 3x(x + 4) - 6x^2$

$H = x(y - 2) + xy$ | $J = 9x(x^2 - 6) + 2x^2$

$K = 5x(3 + 5x) + x(5 + x) + 4x(2x + 1)$

54 Développe et réduis chaque expression.

$L = 11 + 2(x - 6)$ | $P = -15 - 9(-5 + 3b)$

$M = -3(2y - 4) - 2y$ | $Q = -5(6 - 3z) - 9 + z$

$N = 7 - 4(8 - 2a) + a$ | $R = 12x - 4(6 - 3x)$

55 Développe et réduis chaque expression.

$S = 3x - 5 + 5(2x - 2)$

$T = 4y - 6(3 - 2y) + 4(y - 1)$

$U = 5t^2 + 3(2t - 3) - 2t(t - 5)$

56 Développe et réduis chaque expression.

$V = 11 + 2(x - 6) + 4(-3x - 6)$

$W = -2(x - 5) - 3(7 - 4x)$

$X = 8 + 2y - 5(2y - 6) + 4$

$Y = -7y - 4(3y - 6) + 3 + 2(3y - 7)$

$Z = -5z + 5z(z - 3) - 7(6 - 8z)$

57 Développe et réduis chaque expression.

$A = 3\left(\frac{1}{4} + x\right) - \frac{1}{4}$ | $C = \frac{3}{4}(x - 5) + \frac{1}{2}$

$B = \frac{2}{3}x + 5\left(x - \frac{1}{6}\right)$ | $D = 2 + 3\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{3}\right)$

58 Développe et réduis chaque expression.

$E = (x + 4)(x + 3)$ | $G = (3z + 4)(5 - 6z)$

$F = (y + 3)(2y + 8)$ | $H = (-7t + 8)(3 - 5t)$

59 Développe et réduis chaque expression.

$I = (7 - 3x)(9x - 3)$ | $K = (4a + 6)(-3 - 5a)$

$J = (-2 - 3y)(4 - 8y)$ | $L = (5z - 7)(8z + 2)$

60 Développe et réduis chaque expression.

$M = (a + 1)^2$ | $P = (3y - 4)^2$

$N = (5x + 2)^2$ | $Q = (4 - x)^2$

61 Développe et réduis chaque expression.

$R = 3(x + 1)(x - 5)$ | $T = -(y + 5)(3y - 6)$

$S = 2(-3 - t)(t - 7)$ | $U = x(2x - 5)(2 - x)$

62 Supprime les parenthèses puis réduis chaque expression.

$A = 5 + (2x + 3)$ | $D = (4x + 2) + (-6x - 2)$

$B = 5x - (3 - 4x)$ | $E = -(-3x - 1) + (x - 3)$

$C = (x - 4) - 6$ | $F = 8x - (5x + 2) + (3 - 4x)$

63 Supprime les parenthèses puis réduis chaque expression.

$G = (x + 3) + (4x - 5)$ | $J = (3y + 7) + (-5y + 3)$

$H = 6 - 2t - (4t - 8)$ | $K = 5z - 6 - (7 - 2z) + 3z$

$I = -(8a + 3) - 4a$ | $L = (3 - 4x) - (-2x + 8)$

64 **QCM**

a. $5(2x + 1) + 3 =$

R.1	R.2	R.3
$10x + 4$	$15x + 3$	$10x + 8$

b. $(x + 3)(2x + 1) =$

R.1	R.2	R.3
$2x^2 + 3$	$2x^2 + 7x + 3$	$7x + 1$

c. $(2 - 5x) - (-4x + 5) =$

R.1	R.2	R.3
$-x - 3$	$-x + 7$	$-9x + 7$

65 Relie les expressions qui sont égales.

$(4x + 3) - (x + 5)$ •	• $3x + 3$
$7x - (3 + 4x)$ •	• $-3x - 5$
$(3 + 4x) - 7x$ •	• 6
$6x - 3 - (3x - 6)$ •	• $3x - 2$
$-(4x + 5) - (-x)$ •	• $-3x + 3$
$5x + 3 - (-3 + 5x)$ •	• $3x - 3$

66 Supprime les parenthèses puis réduis les expressions suivantes.

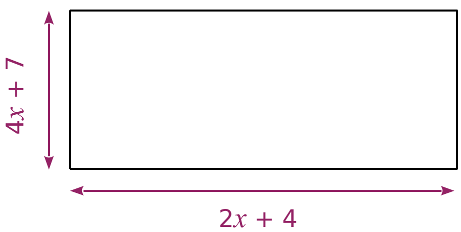
$A = 3x + \frac{1}{4} - (3 - 2x)$

$B = -\left(\frac{1}{3}x + 2\right) + (5x - 3)$

$C = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{6}x\right)$

$D = \frac{1}{2} + 2x - \left(x - \frac{3}{2}\right)$

67 On considère le rectangle ci-dessous.



Exprime en fonction de x :

a. son périmètre, sous la forme d'une expression réduite ;

b. son aire, sous la forme d'une expression factorisée ;

c. son aire, sous la forme d'une expression développée et réduite.

d. Calcule son aire et son périmètre lorsque x est égal à 2 cm.

68 Parmi les expressions suivantes, retrouve celles qui sont égales et justifie ta réponse.

$E = 16 - 4x^2$

$F = (4 - 2x)^2$

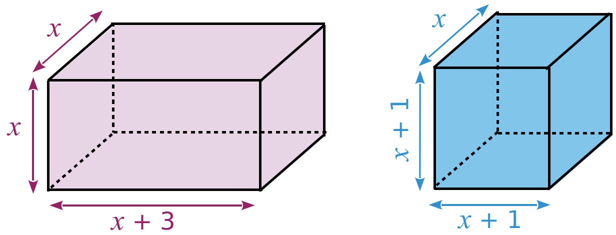
$G = (4 - 2x)(4 + 2x)$

$H = 4x^2 - 16x + 16$

$I = (4 + 2x)^2$

$J = 4x^2 + 16x + 16$

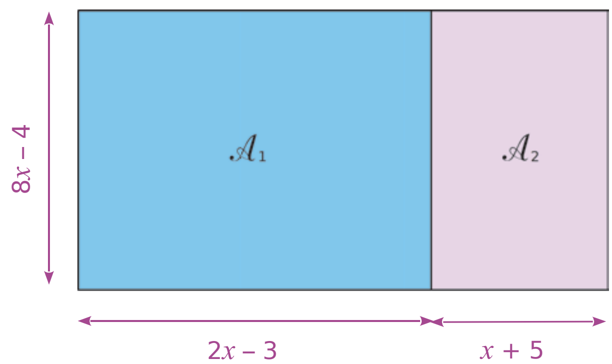
69 On considère les deux parallélépipèdes rectangles suivants.



a. Calcule les deux volumes pour $x = 1$. Que remarques-tu ?

b. Exprime, en fonction de x, les deux volumes. Que remarques-tu ? Comment expliquer alors le résultat de la question **a** ?

70 On considère la figure suivante (x désigne un nombre supérieur ou égal à 2).



a. Exprime les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ en fonction de x.

b. Déduis-en une expression de l'aire totale $\mathcal{A}$ de la figure en fonction de x.

c. Calcule $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}$ pour $x = 6$.

71 Développe et réduis chaque expression.

$K = 3(2x - 6) - (3 - 5x)$

$L = (5 - 2y) - (-3y + 7)$

$M = 4(6 + z) + (z - 3)(2 - z)$

$N = (2t - 5)(3t + 2) - (t^2 + 6)$

72 On considère les expressions :

$P = (x + 2)(x - 3) + (x - 3)$ et $R = (2x - 3)^2$.

a. Développe et réduis les deux expressions.

b. Calcule P pour $x = 3$.

c. Calcule R pour $x = 1{,}5$.

Produire et calculer des expressions littérales

73 Recopie chaque expression en rajoutant les signes $\times$ sous-entendus puis calcule-les pour $x = 2$.

A = $2x$

B = $4x + 5$

C = $4(x - 3)(x + 8)$

D = $3x - 2(5x - 15)$

E = $9x^2$

F = $7 - 2x$

G = $2(3x - 2)$

H = $x(x + 2) - 4x$

I = $4x^2 - 2x(4 - x)$

J = $-3x^2 + 5x - 4$

74 Recopie et complète le tableau suivant.

	$x = 4$	$x = 0$	$x = -2$
$3(2x - 7) - 5x$			
$(x - 4)(x - 2)$			
$(2 - x)^2$			

75 Calcule chaque expression.

K = $3t^2 + 6t - 8$ pour $t = 3$;

L = $5x^2 - 3x + 7$ pour $x = -2$;

M = $-3y^2 - 5y - 8$ pour $y = -3$.

76 Exprime en fonction de x (x étant non nul)...

a. l'opposé de x ;

b. l'inverse de x ;

c. l'opposé du carré de x ;

d. le carré de l'opposé de x ;

e. l'opposé de l'inverse de x ;

f. le carré de l'inverse de x.

77 Soit x l'âge actuel d'Alexis (en années). Comment note-t-on...

a. l'âge qu'il aura dans deux ans ?

b. l'âge qu'il avait il y a trois ans ?

c. le double de son âge ?

d. le triple de l'âge qu'il avait il y a quatre ans ?

e. la moitié de l'âge qu'il aura dans cinq ans ?

f. son année de naissance ?

78 Relie chaque phrase de la première colonne avec l'expression qui lui correspond, où y est le prix d'achat de l'article en euros.

L'article est revendu cinq fois plus cher. •	• $y + 5$
L'article est revendu 5 € de plus. •	• $2y$
Le prix est augmenté de 100 %. •	• $3y$
Le prix est augmenté de 200 %. •	• $5y$

79 Une salle de concert peut contenir 600 places. Il y a x places assises et les autres sont debout. Les places assises coutent 25 € et les places debout 15 €.

a. Que représente chacune de ces expressions ?

- $600 - x$
- $25x$
- $15(600 - x)$

b. Exprime, en fonction de x, la recette totale en euros si toutes les places sont achetées.

c. Calcule cette recette si $x = 200$.

80 Adeline achète 5 CD et 3 DVD. On notera x le prix en euros d'un CD. Un DVD coute 10 euros de plus qu'un CD.

a. Écris, en fonction de x, la dépense d'Adeline en euros. Développe et réduis l'expression trouvée.

b. En utilisant l'expression obtenue au **a**, calcule, en euros, la dépense d'Adeline si un CD coute 15 €.

81 Isabelle achète t kilogrammes d'aubergines à 3,20 € le kilo et elle achète le double en masse de tomates à 2,30 € le kg. Exprime, en fonction de t, le montant de ses achats en euros.

82 On considère les programmes de calcul suivants.

Programme 1 :

- Choisir un nombre ;
- Ajouter 6 à ce nombre ;
- Multiplier le résultat par – 2 ;
- Ajouter le quadruple du nombre de départ.

Programme 2 :

- Choisir un nombre ;
- Soustraire 3 à ce nombre ;
- Multiplier le résultat par 4 ;
- Soustraire le double du nombre de départ.

a. Teste ces deux programmes de calcul :

- pour $x = 2$
- pour $x = -3$
- pour $x = 4$

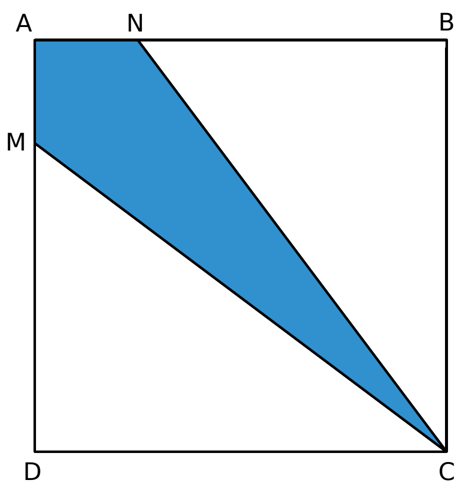
b. Que remarques-tu ?

c. Si l'on note x le nombre choisi au départ, écris une expression A qui traduit le programme 1.

d. De la même manière, écris une expression B pour le programme 2.

e. Comment peux-tu expliquer la remarque faite à la question **b** ?

83 La figure ci-dessous représente un carré de 6 cm de côté. M est un point de [AD] et N est un point de [AB], tels que AM = AN = x (x est un nombre strictement positif).



a. Calcule l'aire des triangles MDC et NBC, en fonction de x.

b. Calcule l'aire du quadrilatère AMCN, en fonction de x.

c. Calcule ces trois aires pour $x = 2$ cm.

84 Soit k un nombre entier. Marc, Vincent, Akim et Jules se partagent un sac de billes. Marc prend k billes. Vincent en reçoit 4 de moins que Marc. Akim a deux fois plus de billes que Marc et 8 de moins que Jules.

a. Calcule le nombre de billes des autres garçons si Marc en prend 7.

b. Exprime le nombre de billes des autres garçons en fonction de k.

c. En utilisant les expressions de la question **b**, déduis-en le nombre total de billes en fonction de k. Réduis l'expression trouvée.

d. En utilisant l'expression trouvée au **c**, calcule le nombre total de billes si Marc en prend 7.

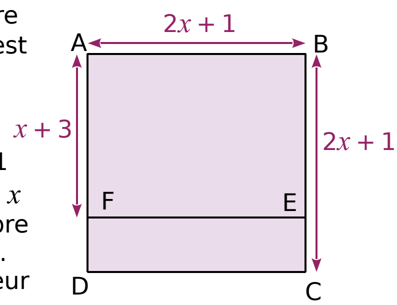
85 **TICE Tableur**

a. Rédige un programme de calcul qui permet d'obtenir l'expression $2x(x - 6) + 4$, où x désigne le nombre choisi au départ.

b. Utilise un tableur afin de calculer cette expression pour les valeurs entières de x entre 10 et 20.

c. Quel nombre de départ permet d'aboutir à 274 quand on applique ce programme ?

86 Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré et ABEF est un rectangle.
On a :
AB = BC = $2x + 1$
et AF = $x + 3$, où x désigne un nombre supérieur à deux.
L'unité de longueur est le centimètre.



a. Pour $x = 3$, calcule AB et AF.

b. Pour $x = 3$, calcule l'aire du rectangle FECD.

c. Exprime la longueur FD en fonction de x.

d. Déduis-en que l'aire de FECD est égale à $(2x + 1)(x - 2)$.

e. Exprime en fonction de x les aires du carré ABCD et du rectangle ABEF.

f. Déduis-en que l'aire du rectangle FECD est :
$(2x + 1)^2 - (2x + 1)(x + 3)$.

g. Les deux aires trouvées aux questions **d** et **f** sont égales et on a donc :
$(2x + 1)^2 - (2x + 1)(x + 3) = (2x + 1)(x - 2)$.
Cette égalité traduit-elle un développement ou une factorisation ?

87 Distributivité à gogo

a. On veut développer l'expression : $A = 2(5x + 2)(3x + 1)$.

Pour cela, développe d'abord l'expression $2(5x + 2)$ puis termine le développement de A.

b. Développe le produit $(x + 2)(3x + 2)$ et déduis-en le développement de :

$B = (x + 2)(3x + 2)(x + 4)$.

c. En t'inspirant des questions précédentes, développe chaque expression.

$C = 4(5x - 1)(3x + 3)$;

$D = (1 - x)(1 + x)(2x + 1)$.

88 Idée fausse

a. On considère les expressions $A = (2x + 3)^2$ et $B = (2x)^2 + 3^2$. Calcule chacune de ces expressions pour $x = 0$ et pour $x = 10$. Qu'en déduis-tu ?

b. Peut-on dire que, pour tout nombre a et tout nombre b non nuls, les expressions $(a + b)^2$ et $a^2 + b^2$ sont égales ? Justifie. Développe alors l'expression $(a + b)^2$.

c. On considère les deux expressions $C = (2x + 3)(2x - 3)$ et $D = (2x)^2 - 3^2$.

Calcule ces expressions pour $x = 0$ puis pour $x = 10$. Qu'en déduis-tu ? Démontre-le.

d. Développe alors l'expression $(a + b)(a - b)$.

89 Calcul mystère

a. Calcule les expressions $2001 \times 1999 - 2000^2$ et $47 \times 45 - 46^2$. Que remarques-tu ?

b. Développe et réduis l'expression suivante :

$(x + 1)(x - 1) - x^2$

c. Les résultats obtenus à la question **a** étaient-ils prévisibles ? Justifie.

d. Écris d'autres expressions du même style et donne leurs résultats sans poser d'opération.

90 Petites démonstrations

a. Que dire de la somme de trois nombres pairs ? Pourquoi ?

b. La somme de trois nombres consécutifs est-elle paire ou impaire ? Justifie.

c. Que dire du produit de deux nombres pairs ? De deux nombres impairs ? De deux nombres consécutifs ? Pourquoi ?

91 Vrai ou Faux

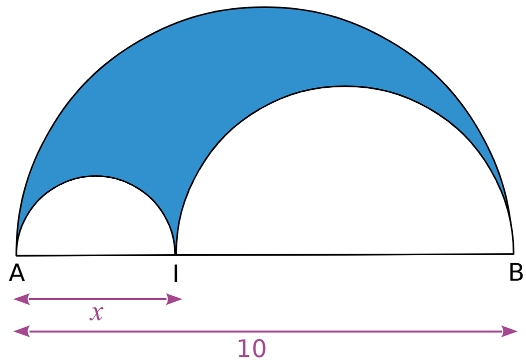
P.1. Multiplier une somme algébrique par -1 revient à changer le signe de tous ses termes.

P.2. $a - [b - (c - d)] = a - b - c - d$

P.3. $(2x - 1)(3 - x) = (1 - 2x)(x - 3)$

P.4. $-(13x - 5)^2$ est toujours négatif, quelle que soit la valeur de x.

92 Le tricercle de Mohr



La figure ci-dessus est constituée de trois demi-cercles dont les centres appartiennent au segment [AB].

a. Réalise cette figure pour $x = 3$. Dans ce cas-là, calcule la longueur de chacun des trois demi-cercles (tu arrondiras au dixième).

Quel est alors le périmètre de la zone bleue délimitée par les trois demi-cercles ?

b. Même question pour $x = 8$.

c. Que remarques-tu ?

d. Exprime, en fonction de x et de π, la longueur de chacun des trois demi-cercles.

e. Déduis-en une expression du périmètre de la zone bleue en fonction de x et de π.

Que peux-tu dire de ce périmètre ? Justifie.

f. Utilise le résultat de la question précédente pour déterminer le périmètre de la zone bleue lorsque $x = 1$, puis pour $x = 5$ et enfin pour $x = 8{,}7$.

93 Développe et réduis.

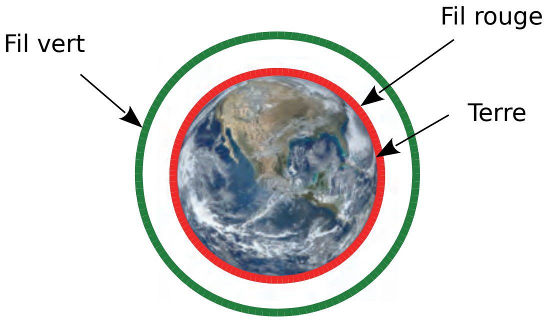
$A = 3(-2x + 5) + (-2x + 5)(x - 3)$

$B = (2a - 5)(3 - 4a) - 2(5 - a)$

$C = -(3 - 4z)(z - 2)$

$D = -5r(2 - 3r) + (-r - 2)(2r + 5)$

94 *Tour de taille*



a. On veut dérouler un fil rouge autour de la Terre au niveau de l'équateur. En supposant qu'on assimile la Terre à une sphère, et qu'on note r son rayon, exprime la longueur L_r du fil rouge en fonction de r.

b. On veut dérouler, cette fois-ci, un fil vert à un mètre au-dessus du fil rouge. Exprime la longueur L_v du fil vert en fonction de r.

c. Calcule et réduis l'expression $L_v - L_r$. Cette expression dépend-elle du rayon ? Qu'en déduis-tu ?

d. Sachant que le rayon de la Terre est d'environ 6 500 km, calcule la longueur du fil rouge puis déduis-en, par une simple addition, la longueur du fil vert.

95 Au XVII^e siècle, les physiciens et les astronomes effectuaient des calculs très complexes à la main. Le mathématicien anglais Hörner a mis au point une méthode efficace pour économiser des opérations, méthode encore utilisée de nos jours en informatique.

a. On considère les expressions suivantes : A = $2x^2 + 3x - 2$ et B = $-2 + x(3 + 2x)$. Pour une valeur de x donnée, indique le nombre de multiplications et d'additions à effectuer pour trouver le résultat dans chacune des deux expressions. Démontre ensuite que A = B.
Quel est alors l'intérêt de l'expression B par rapport à l'expression A ?

b. Transforme l'expression C = $5x^2 - 6x - 4$ pour qu'elle contienne moins d'opérations à effectuer.

c. Démontre que, pour tous nombres a, b et c :

$$ax^2 + bx + c = x(ax + b) + c$$

d. Transforme chaque expression en utilisant plusieurs fois la même technique.

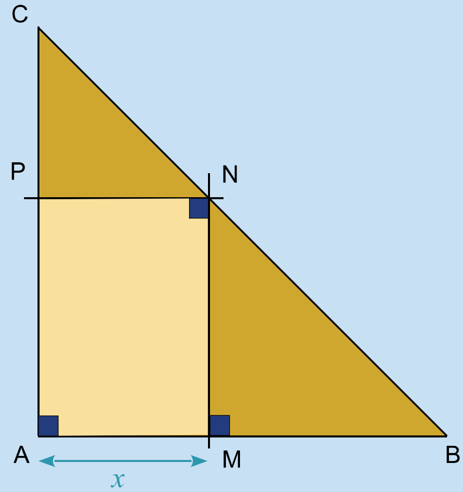
D = $4x^3 - 5x^2 + 6x - 1$

E = $4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 2$

e. Calcule chaque expression D et E pour $x = 4$ de deux façons différentes.
Quelle méthode est la plus rapide ? Pourquoi ?

96 TICE Tableur

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que AB = 10 cm.



a. Quelle est la nature du quadrilatère AMNP ? Justifie. Démontre que les triangles CPN et MNB sont isocèles.

b. Quelles valeurs peut prendre le nombre x ?

c. Exprime la longueur AP en fonction de x, et déduis-en l'aire du rectangle AMNP en fonction de x.

d. À l'aide d'un tableur, programme les cellules pour compléter automatiquement la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	...	K	L
1	Valeur de x (en cm)	0	1	2	...	9	10
2	Aire de AMNP (en cm²)				...		

e. Où semble se trouver le point M quand l'aire de AMNP est maximale ? Que dire alors de cette aire par rapport à l'aire du triangle ABC ?

f. Pour quelle(s) valeur(s) de x, l'aire de AMNP est-elle égale à 10 cm² (tu donneras un encadrement à l'unité) ?

À l'aide du tableur, affine la (les) valeur(s) de x trouvée(s) ci-dessus, au dixième puis au centième.

g. Vérifie graphiquement les résultats trouvés aux questions **e** et **f**.

Pour cela, construis un repère avec les unités suivantes :
- en abscisse : 1 cm pour une unité ;
- en ordonnée : 1 cm pour cinq unités.

Puis représente dans ce repère l'aire de AMNP en fonction de x.

Multiplier par 11

L'objectif est de trouver une règle de calcul mental, permettant de multiplier par 11 un nombre à deux chiffres sans poser la multiplication.

a. Pose 11×27 et 11×34. Que remarques-tu ? Essaie d'énoncer cette règle.

b. On considère un nombre N à deux chiffres. Notons U son chiffre des unités et D son chiffre des dizaines. Écris N en fonction de D et U.

c. Démontre que $11N = 100D + 10(U + D) + U$. Conclus.

d. Utilise cette technique pour calculer rapidement 11×52 ; 11×44 et 11×72.

e. Lorsque la somme des chiffres de N dépasse 9, on utilise une retenue. Calcule ainsi 11×57 et 11×95.

Plus fort que le tableur ?

a. Reproduis le tableau suivant dans une feuille de calcul.

	A	B	C
1	Premier nombre	2	
2	Deuxième nombre	4	
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11	Somme des 10 nombres		

b. Dans les cellules B3 à B10, on souhaite afficher la somme des nombres contenus dans les deux cellules situées juste au-dessus. Quelle formule peut être saisie en B3 et recopiée jusqu'en B10 ?

c. Quelle formule peut-on saisir en B11 pour obtenir la somme des 10 nombres situés au-dessus ?

d. Compare le nombre situé en B7 avec la somme des nombres en B11. Que remarques-tu ? Est-ce encore vrai si tu modifies les nombres situés en B1 et B2 ?

e. Place en B1 et en B2 le nombre 1. La suite de nombres que tu observes dans les cellules B1 à B10 est très célèbre : on l'appelle la suite de Fibonacci, en hommage au mathématicien italien du Moyen Âge, Léonard de Pise, dit Fibonacci.

f. On note x et y les nombres de départ, situés en B1 et B2. Exprime, en fonction de x et y, les nombres situés dans les cellules B3 à B10, puis leur somme située en B11.

g. Démontre alors la conjecture observée au **d**.

h. Sans tableur (ni calculatrice !), essaie de trouver, rapidement et de tête, la somme finale obtenue en choisissant 1 et 5 comme nombres de départ. Fais de même avec 4 et 7.

N6

Équations

Activités

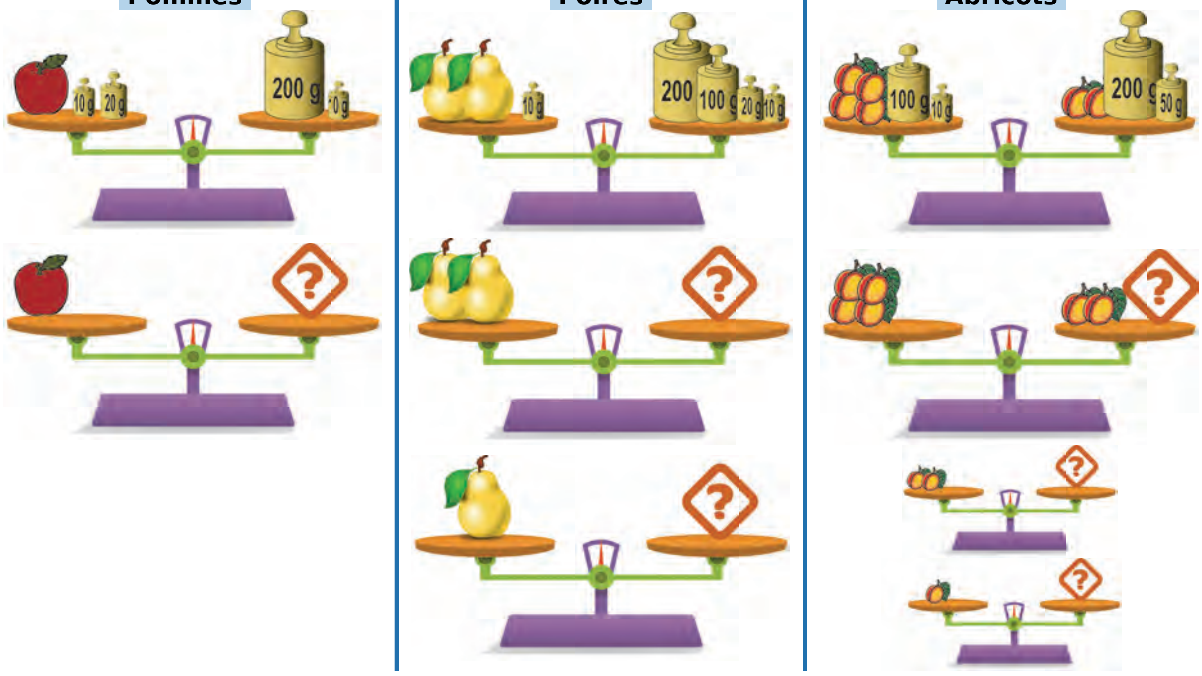
1 Ça balance

→ Cours : 2A

a Dans chaque cas ci-dessous, reproduis les balances à partir de la deuxième. Complète ensuite le plateau de droite avec des masses, de telle manière que les plateaux restent en équilibre. (On suppose que les poires et les abricots ont tous la même masse.) Déduis-en la masse de chaque fruit.

b On pose x la masse d'une pomme. La première pesée s'écrit mathématiquement comme ceci : $x + 30 = 210$. Traduis mathématiquement la seconde pesée. Comment passe-t-on de la première égalité mathématique à la seconde ?

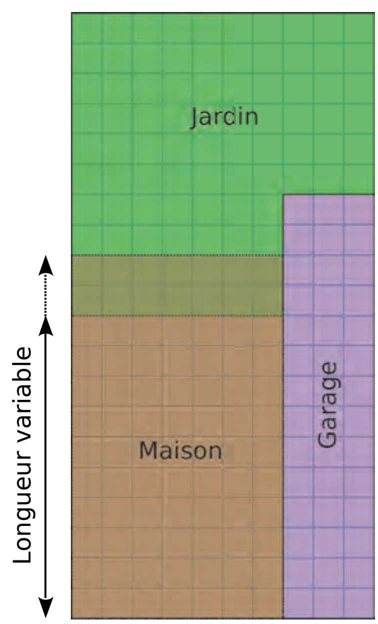
c Fais le même travail avec les poires, puis avec les abricots.



2 Surfaces et équation

→ Cours : 2B

Voici l'implantation d'une maison et de son garage sur un terrain. Un carreau a pour côté 1 m. On souhaite déterminer la longueur de la maison pour que le jardin occupe la moitié de la surface totale du terrain.



a Calcule la surface occupée par la maison et le garage, puis par le jardin, pour quelques longueurs de la maison que tu choisiras. Peux-tu donner une approximation de la longueur recherchée ? Comment pourrais-tu améliorer la précision de ton approximation ?

b On pose x la longueur de la maison. Parmi les expressions suivantes, laquelle représente l'aire de la surface occupée par la maison et le garage, puis celle occupée par le jardin ? Justifie.

- $7x + 42$
- $30x + 21$
- $x + 24$
- 100

c Écris l'équation correspondant à ce problème et conclus.

1 Notion d'équation

→ 13

Définition 1 Une **équation** à une inconnue est une égalité entre deux expressions littérales (deux membres) comportant une ou plusieurs fois la même lettre.

Exemple 1 :

L'égalité $4x - 11 = 37$ est une **équation**.
Elle comporte deux membres : le membre de gauche $4x - 11$ et le membre de droite 37.
Ces deux expressions sont séparées par le symbole « = »
L'inconnue est notée à l'aide de la lettre « x » et est présente dans le membre de gauche.

Définition 2 Résoudre une équation à une inconnue, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue vérifiant l'égalité. Ces valeurs sont appelées « solutions » de l'équation.

Exemple 2 :

On considère l'équation $3x + 4 = -11$.

- Quand x est égal à 2, l'égalité n'est pas vérifiée puisque $3 \times 2 + 4 = 10$ et non -11.
- Mais quand $x = -5$, l'égalité est vérifiée puisque $3 \times (-5) + 4 = -15 + 4 = -11$

On admet que cette équation n'admet qu'une seule solution.
On dit que -5 est la solution de cette équation.

2 Résoudre une équation

A Technique de résolution

→ 25

Propriété 1 On ne change pas une égalité quand on additionne ou soustrait un même nombre aux deux membres de l'égalité.

Exemples 1 : On souhaite résoudre ces deux équations.

$x + 8 = 19$	$x - 7 = -8$	
$x + 8 - 8 = 19 - 8$	$x - 7 + 7 = -8 + 7$	→ On isole le terme x.
$x = 11$	$x = -1$	→ On simplifie.
11 est la solution de l'équation $x + 8 = 19$.	-1 est la solution de l'équation $x - 7 = -8$.	→ On donne la solution.

Propriété 2 On ne change pas une égalité quand on multiplie ou divise les deux membres de l'égalité par un même nombre non nul.

Exemples 2 : On souhaite résoudre ces deux équations.

$4x = 18$	$\frac{x}{3} = 2{,}5$	
$4x \div 4 = 18 \div 4$	$\frac{x}{3} \times 3 = 2{,}5 \times 3$	→ On isole le terme x.
$x = 4{,}5$	$x = 7{,}5$	→ On simplifie.
4,5 est la solution de l'équation $4x = 18$.	7,5 est la solution de l'équation $\frac{x}{3} = 2{,}5$.	→ On donne la solution.

Propriété 3 Pour résoudre une équation, on isole l'inconnue dans un membre, en utilisant les deux propriétés précédentes.

Exemple 3 : On souhaite résoudre cette équation.

$-3x + 5 = 12$

$-3x + 5 - 5 = 12 - 5$ ⟶ On soustrait 5 aux deux membres en appliquant la propriété 1.

$-3x = 7$ ⟶ On réduit.

$\dfrac{-3x}{-3} = \dfrac{7}{-3}$ ⟶ On divise par -3 les deux membres en appliquant la propriété 2.

$x = -\dfrac{7}{3}$ ⟶ On réduit.

$-\dfrac{7}{3}$ est la solution de l'équation $-3x + 5 = 12$.

Remarque : Quand on a déterminé la solution de l'équation, il est prudent d'effectuer une vérification en remplaçant l'inconnue par la valeur trouvée.

On remplace x par $-\dfrac{7}{3}$ dans le membre de gauche de l'équation $-3x + 5 = 12$.

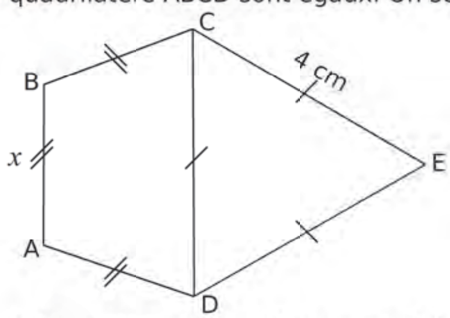
$-3 \times \left(-\dfrac{7}{3}\right) + 5 = 7 + 5 = 12$

Comme on obtient le membre de droite, $-\dfrac{7}{3}$ est bien solution de l'équation $-3x + 5 = 12$.

B Résolution de problème

⟶ 43

Exemple : On considère cette figure où le périmètre du triangle équilatéral CDE et celui du quadrilatère ABCD sont égaux. On souhaite déterminer la longueur du côté [AB].



Le périmètre de CDE est égal à 12 cm.

On note x la longueur du côté [AB] en centimètres.

Le périmètre de ABCD est donc égal à $3x + 4$.

Dire que les deux périmètres sont égaux revient donc à chercher la valeur de x vérifiant l'égalité $3x + 4 = 12$.

Il faut donc résoudre l'équation $3x + 4 = 12$.

On dit qu'on a mis le problème en équation.

- Pour trouver une valeur approchée de la solution de cette équation, on peut utiliser un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
2	3x+4	10	10,3	10,6	10,9	11,2	11,5	11,8	12,1	12,4	12,7	13

Dans la cellule B2, on a saisi la formule « =3*B1+4 » et on a recopié la formule vers la droite.

Par exemple, quand $x = 2{,}8$, le membre de gauche vaut 12,4 ($3 \times 2{,}8 + 4 = 12{,}4$).

Comme le premier membre doit être égal au second membre, c'est-à-dire 12, la solution de l'équation semble comprise entre 2,6 et 2,7.

- Maintenant, on résout l'équation $3x + 4 = 12$ pour obtenir une valeur exacte de la solution.

$3x + 4 = 12$

$3x + 4 - 4 = 12 - 4$

$3x = 8$

$\dfrac{3x}{3} = \dfrac{8}{3}$

donc $x = \dfrac{8}{3}$

Vérification :

$3x + 4$

$= 3 \times \dfrac{8}{3} + 4$ ⟶ On remplace x par $\dfrac{8}{3}$ dans le membre de gauche.

$= 8 + 4$ ⟶ On calcule.

$= 12$ ⟶ On obtient le membre de droite 12.

Les deux périmètres sont donc égaux quand la longueur du segment [AB] est égale à $\dfrac{8}{3}$ cm.

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Chaque nombre suivant est-il solution de l'équation $3x + 10 = 4$?

a. -6 **B.** 2 **c.** -2

2 -3 est-il la solution de...

a. $3x = 9$?

b. $x + 5 = 2$?

c. $3x - 1 = -10$?

d. $-2x + 2 = -8$?

3 Associe les équations à leur solution.

$5x = 3$

$3x = -5$

$x = -1,6$

$5x + 3 = -5$

$x = -\frac{5}{3}$

$x = -\frac{8}{3}$

$x = 0,6$

$3x + 5 = -3$

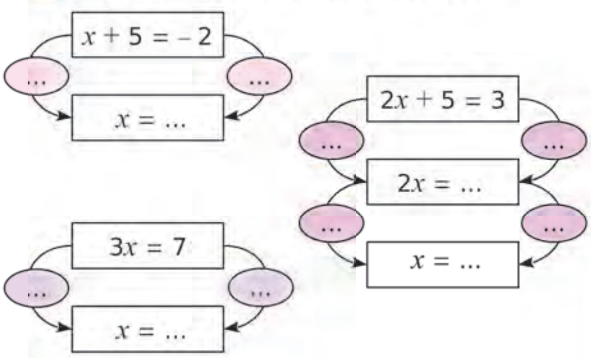
4 Pour chacun des deux membres de ces équations, réalise l'opération demandée.

a. $-4x + 2 = -4$ ➤ Ajouter 4

b. $3x - 5 = 3$ ➤ Multiplier par 3

c. $2 - 8x = -10$ ➤ Diviser par 2

5 Complète les schémas ci-dessous.



6 Résous les équations suivantes.

a. $5x = 15$

b. $x - 7 = -1$

c. $4x - 1 = 0$

d. $-2x + 6 = -4$

7 Exprime, en fonction de x, les expressions suivantes (x étant non nul).

a. la somme de x et de 12 ;

b. le triple de x ;

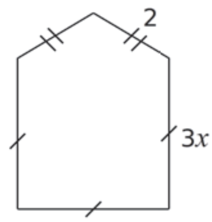
c. l'opposé du double de x ;

d. le produit de x et de 36.

8 Les trois angles d'un triangle sont tels que le second mesure le double du premier, et le troisième mesure le double du second.

Le premier angle peut-il avoir 20° pour mesure ? Explique.

9 Écris l'équation permettant de déterminer la valeur de x, pour laquelle le périmètre de cette figure vaut 26.



10 **Vrai ou Faux**

P.1. -1 est solution de l'équation $x - 1 = 0$.

P.2. L'équation $2x - 5 = -3$ a la même solution que l'équation $4x - 10 = -6$.

P.3. Chaque personnage s'adresse à Marc.

De plus, à eux trois, ils ont 110 ans.

En précisant ce que désigne y, explique ce que permet de déterminer la résolution de l'équation $(y - 2) + y + 2y = 110$.

Exercices Je m'entraine

Solution d'une équation

11 Calcule chaque expression ci-dessous pour la valeur de x indiquée.

A = $x + 8$ pour $x = 7{,}5$ C = $4 + 4x$ pour $x = 3$

B = $-5x$ pour $x = 3$ D = $-2x - 3$ pour $x = -2$

12 Calcule l'expression E = $-4x + 3$ pour...

a. $x = -4{,}5$ **b.** $x = -1$ **c.** $x = 1{,}5$ **d.** $x = 3$

e. Que peux-tu en déduire pour les équations : $-4x + 3 = 7$ et $-4x + 3 = -3$?

13 Le nombre -5 est-il solution de l'équation $5 - 4x = 19$? Et le nombre $-3{,}5$?

14 L'équation $-2x + 5 = -9$ possède-t-elle une solution entière comprise entre 0 et 10 ?

15 QCM

a. -3 est solution de l'équation...

R.1	R.2	R.3
$t - 3 = 0$	$9t = -3$	$3t = -9$

b. Quelle équation a la même solution que $-5x = 2$?

R.1	R.2	R.3
$5x = -2$	$-2x = 5$	$2x = -5$

c. Quelle est la solution de l'équation $3y - 1 = 1$?

R.1	R.2	R.3
$y = 1$	$y = \frac{2}{3}$	$y = 2$

Résoudre une équation

16 Associe les équations équivalentes.

$3x - 2 = 4$ •	• $3x + 2 = 8$
$2x - 3 = 4$ •	• $3x - 3 = -2 - x$
$4x - 2 = 3$ •	• $4x - 3 = 2$
$4x - 3 = -2$ •	• $4x - 6 = 8$

17 Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui admettent pour solution celle de l'équation $7y + 5 = 3y + 8$? Justifie.

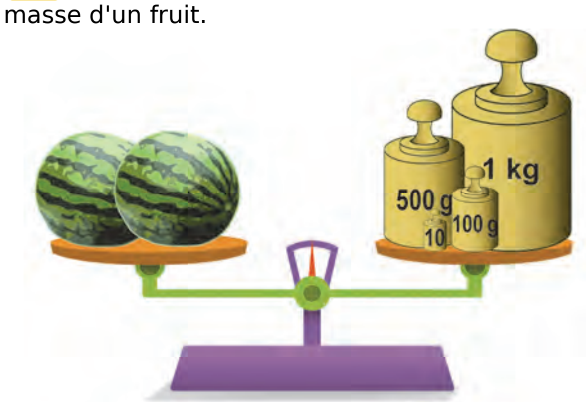
a. $4y + 5 = 3y + 8$

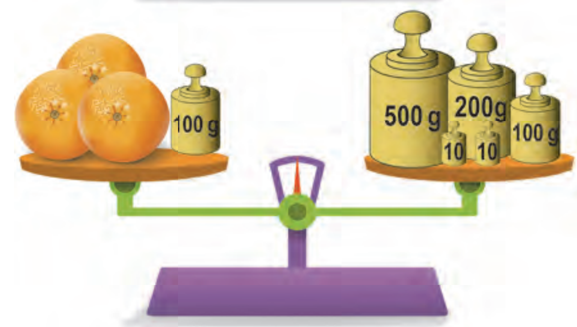
b. $7y = 3y + 3$

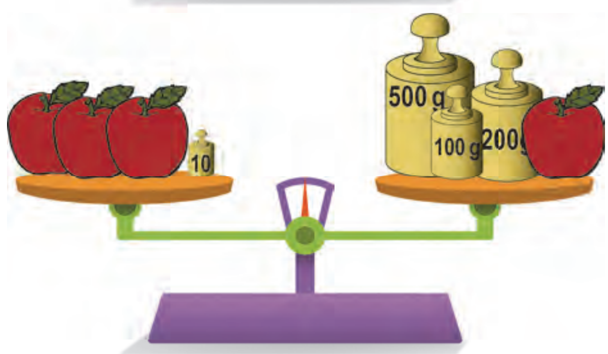
c. $14y + 10 = 6y + 16$

d. $7y - 5 = 3y + 1$

18 Dans chaque cas ci-dessous, calcule la masse d'un fruit.







19 ***Avec un schéma***

a. Complète le schéma suivant.

$$\boxed{x} \xrightarrow{\times 3} \boxed{\ldots} \xrightarrow{+5} \boxed{\ldots}$$

b. Calcule $3x + 5$ lorsque $x = -1$.

c. Pour quel nombre x, l'expression $3x + 5$ vaut-elle -19 ?

d. Résous l'équation $3x + 5 = 12$.

20 Inspire-toi de l'exercice précédent pour résoudre l'équation $-2x + 7 = 2$.

21 **TICE Tableur**

On souhaite savoir si l'équation $-2x + 21 = -15$ possède une solution entière comprise entre 1 et 20.

a. Reproduis la feuille de calcul suivante sachant que, dans la colonne A, tu dois écrire les nombres entiers de 1 à 20.

	A	B	C
1	x	$-2x + 21$	
2	1		
3	2		

b. Laquelle de ces formules faut-il saisir en B2, et étirer vers le bas, pour obtenir la colonne B ?

=−2*x+21	=−2*A2+21	=−2*1+21

c. Pour quelle valeur de x l'égalité $-2x + 21 = -15$ est-elle vérifiée ? Justifie à l'aide du tableur.

22 **TICE Tableur**

Inspire-toi de l'exercice précédent pour savoir si l'équation $-3x + 65 = -40$ a une solution entière entre 0 et 50.

23 Résous les équations suivantes.

a. $x + 6 = 8$
b. $t - 7 = 3$
c. $y + 11 = 10$
d. $1 + x = -2$
e. $t - 5 = -3$
f. $-3 + y = -2$

24 Résous les équations suivantes.

a. $x - 5{,}3 = -3{,}2$
b. $y + 15{,}7 = -30$
c. $-5{,}4 + t = 4{,}85$
d. $x + 7 = -1{,}2$
e. $y - 59{,}7 = -100$
f. $-0{,}99 + t = -0{,}9$

25 Résous les équations suivantes.

a. $3x = 9$
b. $5y = 3$
c. $4z = -7$
d. $-z = -8$
e. $7x = 4$
f. $4z = 0$

26 Résous les équations suivantes.

a. $2x = 7{,}1$
b. $3{,}5z = 0$
c. $-2y = 15{,}7$
d. $2{,}7x = -1{,}2$
e. $-y = -7{,}2$
f. $-0{,}3x = -9$

27 Résous les équations suivantes.

a. $2x - 2 = 2$
b. $3z - 10 = 11$
c. $1 - y = 0$
d. $1 + 5x = -39$
e. $2 + 3z = 9$
f. $6 - y = -2{,}3$

28 Résous les équations suivantes.

a. $7 - 2x = -2{,}5$
b. $7{,}6 + 6z = -11$
c. $-x - 9 = 11{,}2$
d. $9{,}7y - 5{,}7 = -1{,}7$

29 **QCM**

a. La solution de l'équation $2x = 20$ est...

R.1	R.2	R.3
18	10	0

b. La solution de l'équation $x + 2{,}5 = 7{,}5$ est...

R.1	R.2	R.3
5	10	3

c. La solution de l'équation $5z - 4 = 11$ est...

R.1	R.2	R.3
1,4	3	1

30 ***Méli mélo***

Résous les équations suivantes.

a. $7x = 28$
b. $7 + x = 28$
c. $-7x = -28$
d. $7x = -28$
e. $7 - x = 28$
f. $x - 7 = -28$
g. $7 + x = -28$
h. $x - 7 = 28$
i. $-7x = 28$
j. $7 - x = -28$

k. Regroupe les équations qui ont la même solution et explique pourquoi.

Sans faire de calculs et en justifiant, donne la solution de chacune des équations suivantes.

l. $-x - 7 = 28$
m. $-x - 7 = -28$

31 Résous les équations suivantes.

a. $5x = 3x + 3$

b. $8x = 12x + 4$

c. $4 - 7y = 10y$

d. $7x = -4 - x$

32 Résous les équations suivantes.

a. $2 + 3x = 7 - 3x$

b. $5 + 6x = -x - 9$

c. $11x + 3 = 8x + 7$

d. $5{,}5x + 1{,}5 = 9x + 6$

e. $7 - 3{,}3x = 2x - 9{,}7$

f. $5{,}1 - x = -8x + 1{,}7$

33 Résous les équations suivantes.

a. $4(x + 5) = 10x + 3$

b. $3(x - 2) = 6(x + 4)$

c. $7x - (5x + 3) = 5(x - 3) + 2$

d. $7(n + 2) - 3 = 25 - (3n + 4)$

e. $4y + 3(4y - 2) = 3(y + 1)$

34 Résous les équations suivantes.

a. $6x = 6x + 1$ **b.** $3n = 0$ **c.** $0y = 0$

35 **TICE Tableur**

Soit l'équation $3x - 5 = 6x - 13$.

a. Recopie ce tableau et complète-le à l'aide du tableur.

	A	B	C
1	x	$3x - 5$	$6x - 13$
2	1		
3	2		
4	3		

b. Explique pourquoi il semble exister une solution de cette équation entre 2 et 3.

c. Complète un nouveau fichier en testant les valeurs de x comprises entre 2 et 3 avec un pas de 0,1. Donne alors un encadrement plus précis de la solution de cette équation.

	A	B	C
1	x	$3x - 5$	$6x - 13$
2	2		
3	2,1		
4	2,2		

d. Résous cette équation et donne sa solution exacte. Vérifie que ce résultat est cohérent avec tes réponses précédentes.

Résoudre un problème

36 Dans ma classe, il y a 28 élèves. Le jour où Lucas était le seul absent, il y avait deux fois plus de filles que de garçons. Combien y a-t-il de filles dans ma classe ?

37 ***Nombres consécutifs***

a. Trouve trois nombres entiers consécutifs dont la somme vaut 513.

b. Peux-tu trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme vaut 200 ? Justifie.

c. Trouve quatre nombres entiers consécutifs dont la somme vaut 1 254.

38 Dans la famille Bidule, quatre enfants sont nés, avec trois ans d'écart à chaque fois. Quel âge a l'aîné, sachant qu'à eux quatre ils ont un demi-siècle ?

39 Il existe des superstitions par rapport aux nombres. Par exemple, le nombre 13 est reconnu comme étant malchanceux. Le nombre 666 est un autre nombre « mal aimé ». Pourtant, il est très spécial et mérite une attention particulière de la part des mathématiciens. En effet, il peut être décomposé comme une somme de plusieurs nombres entiers naturels consécutifs. Peux-tu trouver plus d'une solution ?

40 Mes parents me donnent de l'argent de poche depuis que j'ai 12 ans. La première année, mon père m'a donné 5 € par semaine. Il augmente cette somme de 5 € tous les ans. Ma mère me donne toujours le double de mon père. À quel âge aurai-je 60 € par semaine ?

41 Paolo est un glacier ambulant réputé. Il dépense 75 € par semaine pour confectionner ses glaces. Sachant qu'une glace est vendue 2,50 €, combien doit-il en vendre par semaine au minimum pour avoir un bénéfice supérieur à 76 € ?

42 Alice et Bertrand affichent un même nombre sur leurs calculatrices.

- Alice multiplie ce nombre par 3, puis ajoute 4 au résultat obtenu.
- Bertrand multiplie ce nombre par 2, puis ajoute 7 au résultat obtenu.

À la fin, leurs calculatrices affichent exactement le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

43 Joey pense à un nombre. Il lui ajoute 11, multiplie le tout par 3 et retranche 3 au résultat obtenu. Joey obtient 51.
Quel est son nombre de départ ?

44 Mickaël a 18 ans et son père a 46 ans.
Dans combien d'années le père de Mickaël aura-t-il le double de son âge ?

45 Hervé a obtenu, lors des trois premiers devoirs, les notes suivantes : 8 ; 5 et 14.
Quelle note minimale doit-il obtenir au dernier devoir pour avoir la moyenne ce trimestre ?

46 ***Sécurité routière***

$E_c = \frac{1}{2}MV^2$

$E_p = Mgh$

- M est la masse (en kg)
- V est la vitesse (en m/s)
- $g = 9{,}81$ (en $N.kg^{-1}$)
- h est l'altitude (en m)

Pour évaluer les forces d'impact, on calcule l'énergie cinétique E_c (énergie liée au mouvement) et l'énergie potentielle de pesanteur E_p (énergie liée à l'altitude).

a. Un véhicule de 900 kg roule à 60 $km.h^{-1}$. Sachant que 60 $km.h^{-1} \simeq 16{,}7$ $m.s^{-1}$, calcule son énergie cinétique E_c.

b. À quelle hauteur doit être placé ce véhicule pour que son énergie potentielle E_p soit égale à l'énergie cinétique trouvée en **a** ?

c. Reprends les questions **a** et **b** avec un véhicule qui roule deux fois plus vite.

47 En 2016, le calcul de l'impôt I pour un revenu annuel imposable R compris entre 9 700 € et 26 791 € (abattement des 10 % inclus) se base sur la relation suivante : $I = \frac{14}{100}R$.
Quel est le revenu annuel imposable R d'un individu qui paie 1 520 € d'impôts ?

48 J'ai 180 € de plus que toi.
Si je te donnais 41 €, alors j'aurais deux fois plus d'argent que toi. Combien avons-nous chacun ?

49 Mes 25 pièces, toutes de 1 € et 2 €, valent 38 €. Combien ai-je de pièces de chaque sorte ?

50 La grande Halle d'Auvergne peut accueillir 8 500 spectateurs. Lors d'un concert, toutes les places debout, à 25 €, et toutes les places assises, à 44 €, ont été vendues. Le montant de la recette était ce soir-là de 312 725 €.
Quel était le nombre de spectateurs debout ?

51 Dans une salle, on dispose en carré un nombre minimum de tables, de façon à en réserver une pour chaque participant.

a. Fais un dessin pour illustrer la situation.

b. De combien de tables sera composé un côté de ce carré si le nombre de participants prévus est 24 ? 134 ?

52 Le ciné-club d'un village propose 2 tarifs.
Tarif A : une carte d'adhésion pour l'année coutant 21 euros, puis 1,50 euro par séance ;
Tarif B : 5 euros par séance sans carte d'adhésion.

a. Pour chaque tarif, calcule le prix payé pour 8 séances.

b. On appelle x le nombre de séances. Exprime en fonction de x le prix payé avec le tarif A, puis avec le tarif B.

c. Quel est le nombre de séances pour lequel le tarif A est égal au tarif B ?

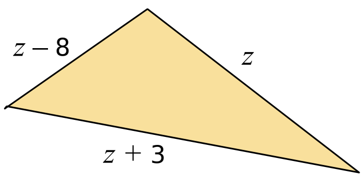
53 Une bonbonne de forme cylindrique contient 18,9 litres d'eau. Le rayon de sa base mesure 13 cm. Détermine la hauteur de la bouteille. Arrondis le résultat au dixième de centimètre.

54 On transforme un carré en un rectangle, en ajoutant 7 cm à la longueur d'un de ses côtés, et en retranchant 2 cm à la longueur d'un autre.

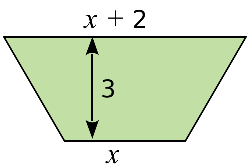
a. Quelles doivent être les dimensions du carré initial pour que le double de son périmètre soit égal au périmètre du rectangle ?

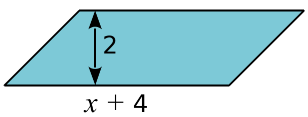
b. Quelles doivent être les dimensions du carré initial pour que son aire et celle du rectangle soient égales ?

55 Trouve la valeur de z, sachant que le périmètre du triangle ci-dessous vaut 61.
Les mesures sont exprimées dans la même unité.



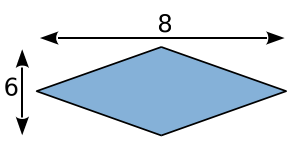
56 Soient le trapèze et le parallélogramme ci-dessous. Les mesures sont exprimées dans la même unité.

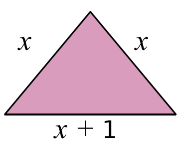




Quelle doit être la valeur de x pour que le trapèze et le parallélogramme aient la même aire ?

57 Soient le losange et le triangle isocèle ci-dessous. Les mesures sont exprimées dans la même unité.





Trouve la valeur de x telle que le périmètre du losange soit égal au double de celui du triangle.

58 Trouve une fraction égale à $\frac{4}{3}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est égale à 63 (tu appelleras x le numérateur de la fraction recherchée).

59 Les longueurs sont données en cm et les aires en cm². L et l désignent respectivement la longueur et la largeur d'un rectangle. On sait que l'aire de ce rectangle vaut 230,4 et que $\frac{L}{l} = \frac{5}{2}$.

a. Calcule les mesures exactes de la longueur et de la largeur de ce rectangle.

b. Calcule la mesure exacte du périmètre de ce rectangle.

60 Quand on retranche un même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{4}{5}$, on obtient la fraction $\frac{5}{4}$. Trouve ce nombre.

61 On considère trois nombres notés, dans cet ordre : x, y et z. Le quart du premier est égal au cinquième du second qui est lui-même égal au sixième du troisième. De plus, la somme de ces trois nombres est égale à 600.

a. Calcule y et z en fonction de x.

b. Déduis-en la valeur de ces trois nombres.

62 QCM

a. Une brioche et un pain coutent 7 euros. Soit x le prix d'une brioche. Le prix d'un pain est alors égal à...

R.1	R.2	R.3
$7 - x$	$7 + x$	$x - 7$

b. Dans un troupeau de moutons et de chèvres, il y a quatre fois plus de moutons que de chèvres. Soit x le nombre de chèvres.
Le nombre d'animaux dans le troupeau est...

R.1	R.2	R.3
$4 + x$	$4x$	$5x$

c. Un carré de côté x cm a pour périmètre 12 cm. Quelle équation permet de déterminer la longueur de son côté ?

R.1	R.2	R.3
$4x = 12$	$x \times x = 12$	$4 + x = 12$

63 À un jeu télévisé, la première bonne réponse rapporte 100 €. Puis le gain double à chaque bonne réponse. Nari veut gagner plus de 100 000 €. À combien de questions doit-il répondre au minimum ? Détaille tes recherches.

64 La formule de Lorentz permet d'associer la masse corporelle théorique P (en kg) d'un adulte à sa taille T (en cm), si celle-ci est comprise entre 140 et 220 cm.

Femme : $P_F = T - 100 - [T - 150] \div 2$

Homme : $P_H = T - 100 - [T - 150] \div 4$

a. Quelle est la masse corporelle théorique d'une femme mesurant 1,50 m ? 1,60 m ?
Quelle est la taille idéale d'une femme dont la masse est 51 kg ?

b. Quelle est la masse corporelle théorique d'une homme mesurant 1,50 m ? 1,90 m ?
Quelle est la taille idéale d'un homme dont la masse est 62 kg ?

65 On recherche la(les) valeur(s) approchée(s) du(des) nombre(s) dont le carré vaut 0,5.

a. Recopie et complète le tableau suivant.

x	− 1	− 0,9	− 0,8	− 0,7	...	0,7	0,8	0,9	1
x^2									

b. Dans un repère, représente graphiquement x^2 (en ordonnée) en fonction de x (en abscisse). (Tu prendras 10 cm pour une unité sur chaque axe.)

c. Détermine graphiquement la(les) valeur(s) approchée(s) de x pour la(les)quelle(s) $x^2 = 0,5$. Que remarques-tu ?

66 Calcule la résistance d'un appareil fonctionnant sous une tension de 220 V pendant 45 min et consommant une énergie de 1 125 Wh.

Relations électriques

$E = Pt$
- E : Énergie électrique (en Wh)
- t : temps de fonctionnement (en h)
- P : Puissance consommée (en watts)

$P = UI$
- U : Tension (en volts)
- I : Intensité (en ampères)

$U = RI$
- R : Résistance (en ohms)

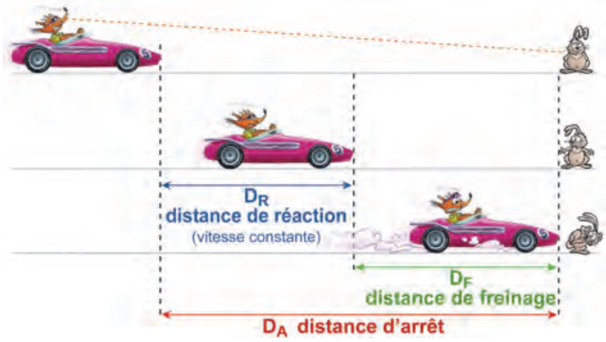
67 Vrai ou Faux

P.1. L'équation $x + 3 = x + 2$ n'a aucune solution.

P.2. L'équation $x^2 = 4$ a pour unique solution 2.

P.3. Si un nombre est solution d'une équation, son opposé est une autre solution de l'équation.

68 ***Sécurité routière et distance d'arrêt***



a. Le temps de réaction d'un conducteur vigilant est d'environ 0,75 s. Calcule la distance parcourue par un véhicule roulant à 100 km.h^{-1} (27,8 m.s^{-1}) pendant ce temps de réaction.

$$V = \frac{D_R}{t}$$

- V est la vitesse (en m.s^{-1})
- D_R est la distance de réaction (en m)
- t est le temps de réaction (en s)

b. Calcule la distance de freinage d'un véhicule roulant à 100 km/h sur route sèche (coefficient d'adhérence A = 0,6). À quelle vitesse doit rouler ce même véhicule sur chaussée humide (coefficient d'adhérence A = 0,4) pour que sa distance de freinage reste inchangée ?

$$D_F = \frac{V^2}{2gA}$$

- D_F : distance de freinage (en m)
- V : vitesse (en m.s^{-1})
- $g = 9,81$ (en N.kg^{-1})
- A : coefficient d'adhérence

c. Calcule la distance d'arrêt d'un véhicule roulant à 100 km.h^{-1}, dans la situation optimale (route sèche, plate et en bon état, freins performants, conducteur vigilant).

d. Autre méthode :

$$D = \left(\frac{V}{10}\right)^2$$ V est la vitesse exprimée en km.h^{-1}.

Estime cette distance d'arrêt dans la situation optimale en utilisant la relation écrite ci-dessus.

69 TICE Tableur

L'équation $x^2 + 3x = 3\,591$ a deux solutions entières comprises entre − 100 et 100.

a. Trouve ces deux solutions à l'aide du tableur.

b. L'équation $x^2 + 3x = 3\,592$ a-t-elle une solution entière entre − 100 et 100 ?

Carrés magiques

PARTIE 1 : Carrés additifs

6	7	2
1	5	9
8	3	4

a. Le carré ci-contre est un carré magique d'ordre 3.

« Être magique » signifie que la somme des nombres en ligne, en colonne et en diagonale est la même.

Vérifie que ce carré est bien magique.

Ce second carré permet d'établir une méthode pour construire des carrés magiques d'ordre 4.

a		$a+1$	b
	$a+11$	$a-2$	
	$a-3$	$b+3$	$a+4$
		$a+7$	

b. Soit S la somme commune aux lignes, aux colonnes et aux diagonales. Exprime S en fonction de a et de b.

c. Recopie puis complète toutes les cases du carré pour qu'il soit magique.

TICE Tableur

d. Dans un tableur, programme les cellules de A1 jusqu'à D4 pour obtenir un carré magique comme au **c**, en fonction des cellules A1 et D1.

e. À l'aide du tableur, trouve le carré magique dans chacun des cas suivants :
- la cellule A2 contient 17 et la cellule A3 contient 10 ;
- la cellule D2 contient 14 et $S = 56$;
- la cellule B4 contient 4 et $S = 59$.

PARTIE 2 : Carrés multiplicatifs

f. Un carré est multiplicativement magique quand le produit des nombres en ligne, en colonne et en diagonale, est le même. Voici une méthode pour construire de tels carrés magiques. On prend deux carrés additivement magiques et on construit le carré multiplicatif comme ci-dessous.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

$a^8 \times b^2$	$a^1 \times b^7$	...
$a^3 \times b^9$	...	...
...	...	...

g. Utilise cette méthode pour construire des carrés multiplicatifs avec le tableur, dans les cas suivants : $a = 1$ et $b = 2$; $a = 1$ et $b = 3$; $a = 2$ et $b = 3$; $a = 3$ et $b = 3$. Vérifie avec le tableur qu'ils sont bien magiques.

h. Que se passe-t-il dans le tableur si $a = 7$ et $b = 3$? Le tableur permet-il de vérifier que le carré est magique ? Écris le carré magique obtenu dans ce cas, en utilisant la notation *puissance*. Peux-tu expliquer pourquoi ce carré est encore magique ?

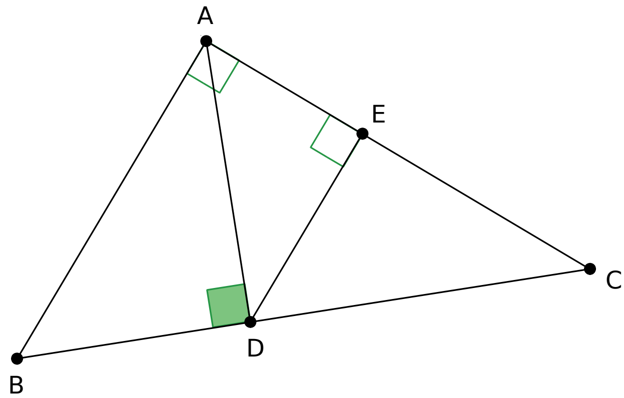
G1

Théorème de Pythagore

Activités

1 Hypoténuses

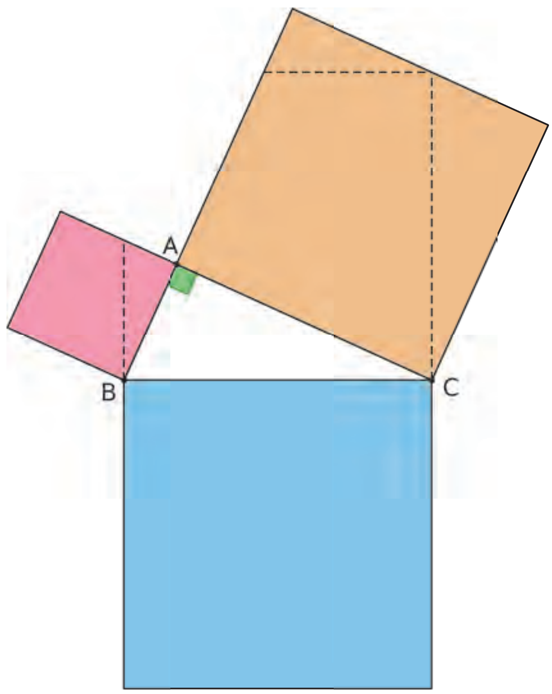
Cours : 1



Combien distingues-tu de triangles rectangles dans cette figure ?
Nomme chacun d'eux et précise leur hypoténuse.

2 Le théorème de Pythagore

Cours : 2



a Trace un triangle ABC rectangle en A.
Construis trois carrés sur les trois côtés de ce triangle rectangle.
Trace les pointillés comme sur la figure ci-dessus.
Découpe les deux petits carrés le long des pointillés, de manière à obtenir un puzzle de 5 pièces.
Essaie de superposer ces pièces sur le carré bleu.
Quelle égalité peux-tu en déduire ?

b ***Deux applications numériques***

- Sachant que AB = 6 et AC = 8, peux-tu en déduire BC ?
- Sachant que BC = 13 et AC = 12, peux-tu en déduire AB ?

3 Réciproque

Cours : 3

a Voici une propriété mathématique :
« **Si** un triangle a deux côtés égaux, **alors** le triangle est isocèle. »
Cette propriété est vraie.

La **réciproque** de cette propriété est la propriété mathématique suivante :
« **Si** un triangle est isocèle, **alors** le triangle a deux côtés égaux. »

Comment obtient-on la réciproque de la propriété ? Cette propriété est-elle vraie également ?

b Pour chacune des propriétés mathématiques vraies suivantes, écris leur réciproque. Précise si elle est vraie ou fausse.

P.1. **Si** un quadrilatère est un rectangle,
alors deux côtés du quadrilatère sont perpendiculaires.

P.2. **Si** deux points A et B sont symétriques par rapport à un point O,
alors O est le milieu du segment [AB].

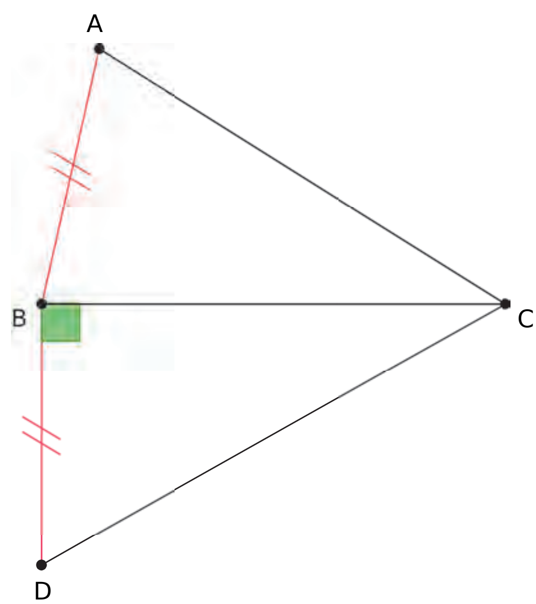
P.3. **Si** un nombre entier a 5 pour chiffre des unités,
alors il est divisible par 5.

P.4. **Si** un quadrilatère est un parallélogramme,
alors les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu.

4 La réciproque du théorème de Pythagore

Cours : 3

ABC est un triangle particulier dont les côtés vérifient l'égalité $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



a Explique pourquoi on peut en déduire que DC = AC.

b Que peux-tu dire alors des deux triangles ABC et BDC ?

c Qu’as-tu démontré ici ?

1 Vocabulaire du triangle rectangle

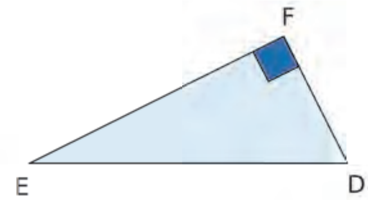
→ 13

Définitions

- Un **triangle rectangle** est un triangle qui a un angle droit.
- Le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse**.
  C'est le plus grand côté du triangle.

Exemple :

- DEF est un **triangle rectangle** en F.
- [DE] est l'**hypoténuse** : c'est le plus grand côté du triangle rectangle.
- Les deux autres côtés [EF] et [DF] sont perpendiculaires.



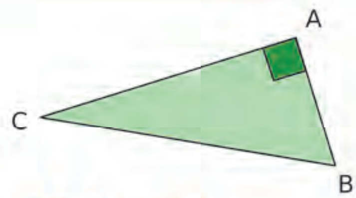
2 Le théorème direct

→ 23 29

A Théorème de Pythagore

Théorème **Si** un triangle est rectangle, **alors** le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

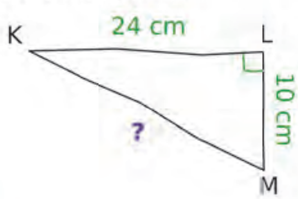
Exemple :
ABC est un triangle **rectangle en A** d'hypoténuse [BC].
Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$.



B Calcul de la longueur de l'hypoténuse

Exemple : Soit KLM un triangle rectangle en L tel que KL = 24 cm et LM = 10 cm. Calcule KM.

Figure à main levée :

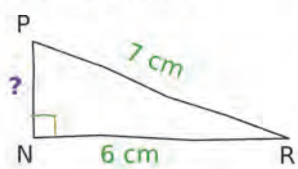


Le triangle KLM est rectangle en L, son hypoténuse est le côté [KM].
Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$KM^2 = LK^2 + LM^2$
$KM^2 = 24^2 + 10^2$
$KM^2 = 576 + 100$
$KM^2 = 676$
$KM = \sqrt{676}$ cm
KM = 26 cm (**valeur exacte**)

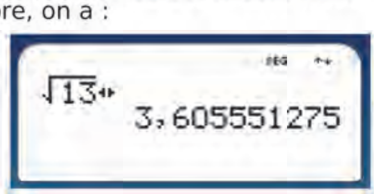
C Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit

Exemple : Soit NPR un triangle rectangle en N tel que PR = 7 cm et NR = 6 cm. Calcule NP.

Figure à main levée :



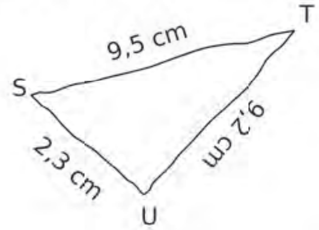
Le triangle NPR est rectangle en N, son hypoténuse est le côté [PR].
Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$PR^2 = NP^2 + NR^2$
$7^2 = NP^2 + 6^2$
$NP^2 = 7^2 - 6^2$
$NP^2 = 49 - 36$
$NP^2 = 13$
$NP = \sqrt{13}$ cm (**valeur exacte**)
$NP \approx 3{,}6$ cm (**valeur approchée au dixième**)



D Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Exemple : STU est un triangle tel que ST = 9,5 cm, TU = 9,2 cm et SU = 2,3 cm.
Démontre que STU n'est pas un triangle rectangle.

Figure à main levée :



Le plus grand côté est [ST] donc on calcule séparément :

ST^2 et $TU^2 + SU^2$

$= 9{,}5^2$; $= 9{,}2^2 + 2{,}3^2$

$= 90{,}25$; $= 84{,}64 + 5{,}29$

$= 89{,}93$

$ST^2 \neq TU^2 + SU^2$

On en déduit donc que le triangle STU n'est pas rectangle.

3 Le théorème réciproque

→ 50

A Réciproque du théorème de Pythagore

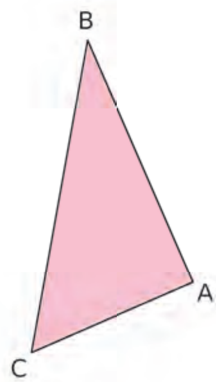
Théorème **Si,** dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, **alors** ce triangle est un triangle rectangle.

Exemple :

ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Donc, d'après le théorème réciproque de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est **rectangle en A**.

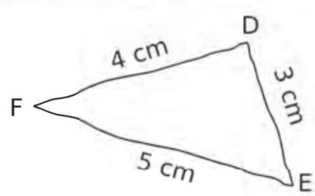
Son hypoténuse est le plus grand côté, c'est-à-dire [BC].



B Démontrer qu'un triangle est rectangle

Exemple : DEF est un triangle tel que DE = 3 cm, EF = 5 cm et DF = 4 cm.
Démontre que DEF est un triangle rectangle.

Figure à main levée :



Le plus grand côté est [EF], donc on calcule séparément :

EF^2 et $DE^2 + DF^2$

$= 5^2$; $= 3^2 + 4^2$

$= 25$; $= 9 + 16$

$= 25$

$EF^2 = DE^2 + DF^2$

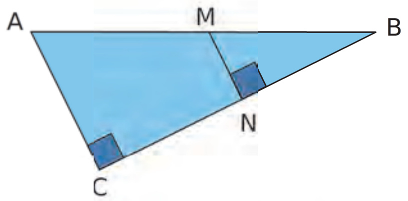
On en déduit donc, d'après le théorème réciproque de Pythagore, que le triangle DEF est rectangle en D.

Exercices

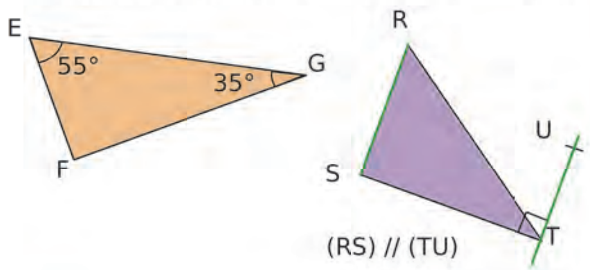
À l'oral !

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

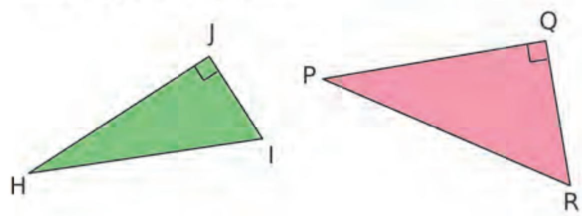
1 À partir de la figure ci-dessous, énonce deux phrases avec l'expression « ... est rectangle en ... . », puis deux phrases avec l'expression « ... est l'hypoténuse de ... . ».



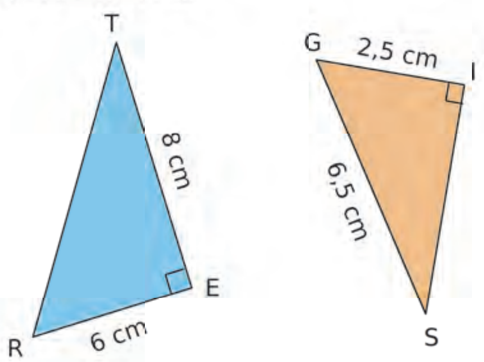
2 Peut-on appliquer le théorème de Pythagore dans les triangle EFG et RST ? Justifie.



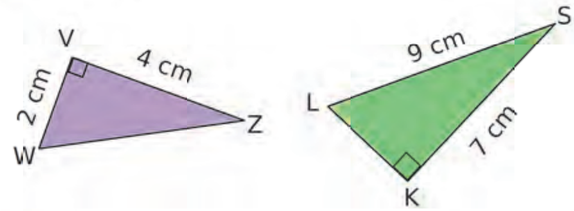
3 Énonce l'égalité de Pythagore pour les deux triangles ci-dessous.



4 Calcule la valeur exacte de TR, puis la valeur exacte de SI.



5 Donne une mesure approchée au dixième de WZ et LK.

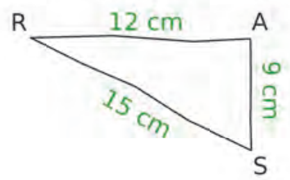


6 Pour chaque triangle, donne une mesure approchée au dixième du troisième côté.

a. EFG rectangle en E, tel que EF = EG = 5 cm.

b. MNR rectangle en R, tel que MN = 8 cm et RM = 1 cm.

7 Justifie que le triangle ci-dessous est rectangle et précise en quel sommet.



8 Soit DEF un triangle tel que DE = 11 cm ; EF = 13 cm et DF = 15 cm. Démontre que ce n'est pas un triangle rectangle.

9 On considère le triangle EFG tel que $EF^2 + FG^2 = EG^2$. Que peut-on dire du triangle EFG ?

10 Vrai ou Faux

P.1. ZKT est un triangle rectangle en K, donc [KT] est le plus grand côté de ce triangle.

P.2. BZI est un triangle rectangle en I, donc $BI^2 + ZI^2 = ZB^2$.

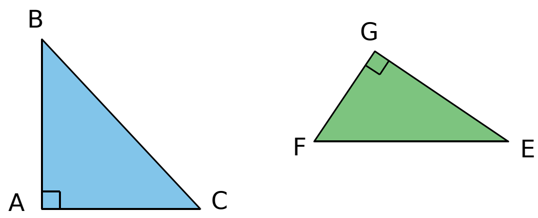
P.3. Si $TU^2 = 10$, alors TU = 5.

P.4. Un triangle dont les longueurs des côtés sont 3 cm, 4 cm et 5 cm est rectangle.

P.5. Si ABC est rectangle, alors le triangle dont les côtés mesurent tous 1 cm de plus que les côtés de ABC est aussi rectangle.

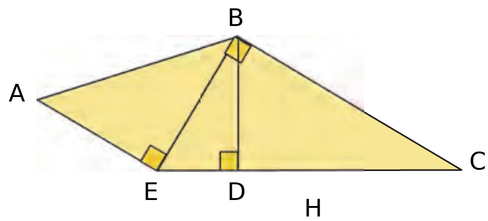
Vocabulaire du triangle rectangle

11 Nomme l'hypoténuse de chaque triangle.

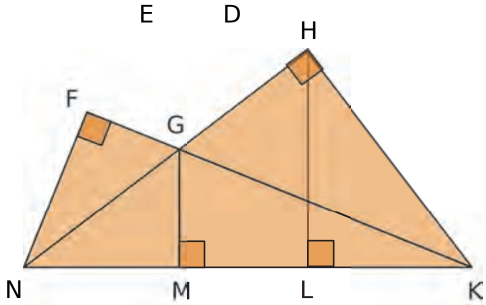


12 Nomme tous les triangles rectangles codés et leur hypoténuse dans les figures suivantes.

a.



b.



13 ***Sans figure***

a. NRV est un triangle rectangle en V. Nomme son hypoténuse.

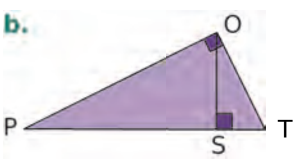
b. AJT est un triangle rectangle d'hypoténuse [JT]. Quels sont les côtés de l'angle droit ?

14 **QCM**

a. KRS est un triangle rectangle tel que KR = 10 ; KS = 26 et RS = 24. L'hypoténuse de KRS est...

R.1	R.2	R.3
[KR]	[RS]	[KS]

b.



[OT] est l'hypoténuse du triangle...

R.1	R.2	R.3
SOT	POT	OSP

Théorème de Pythagore

15 **TICE Géométrie Dynamique**

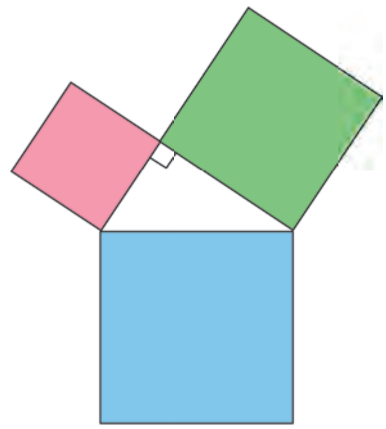
a. Construis un triangle ABC rectangle en A.

b. Construis, sur les côtés, les trois carrés extérieurs au triangle ABC.

c. Affiche leur aire.

d. Comment vérifier avec ces aires le théorème de Pythagore ?

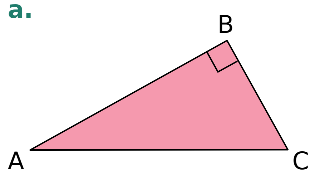
16 Recopie et complète le tableau associé à cette figure.



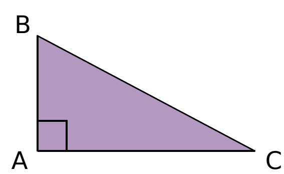
	a.	b.	c.	d.	e.
Aire bleue (cm²)	25	100			
Aire verte (cm²)	16				
Aire rose (cm²)		36		25	
Côté du carré bleu (cm)			15	13	
Côté du carré vert (cm)			12		16
Côté du carré rose (cm)					12

17 Écris l'égalité de Pythagore pour les triangles rectangles suivants.

a.



b.

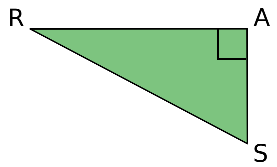


c. XYZ tel que (XY)⊥(YZ). **d.** BRM rectangle en M.

18 Relie l'égalité au triangle correspondant.

$LO^2 = LA^2 + AO^2$ •		• AOL rectangle en O
$LO^2 + LA^2 = AO^2$ •		• AOL rectangle en A
$LA^2 = LO^2 + AO^2$ •		• AOL rectangle en L

19 Recopie et complète les trois égalités correspondant à la figure suivante.



- $RS^2 = ...$
- $AR^2 = ...$
- $AS^2 = ...$

20 ***Sans figure***

a. Recopie et complète, sachant que BLE est un triangle rectangle en L.

$LB^2 = ...$ $EB^2 = ...$ $LE^2 = ...$

b. Écris trois égalités analogues correspondant au triangle DUR, rectangle en R.

21 Relie l'égalité au triangle correspondant.

$MI^2 = ME^2 - IE^2$ •		•	MIE rectangle en M
$IE^2 - EM^2 = MI^2$ •		•	MIE rectangle en E
$MI^2 = ME^2 + IE^2$ •		•	MIE rectangle en I

22 **QCM**

a. ERT est rectangle en R.
Quelle égalité peut-on écrire ?

R.1	R.2	R.3
$ER^2 + ET^2 = TR^2$	$ER^2 + RT^2 = TE^2$	$TR^2 + ET^2 = ER^2$

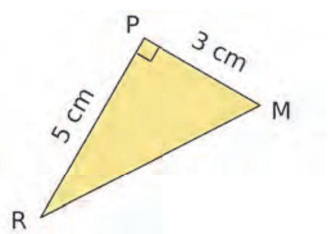
b. Si MK = 8, alors MK^2...

R.1	R.2	R.3
≈ 2,8	= 16	= 64

c. Si $ZE^2 = 20$, alors ZE...

R.1	R.2	R.3
= 10	= 400	≈ 4,5

d.



RM = ...

R.1	R.2	R.3
5,8 cm environ	4 cm	8 cm

23 ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 48 mm et AC = 64 mm.

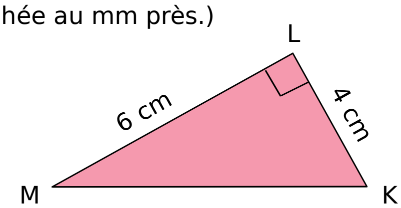
Calcule la longueur de l'hypoténuse [BC].

24 EFG est un triangle rectangle en E tel que EF = 33 mm et EG = 56 mm.

a. Construis ce triangle en vraie grandeur.

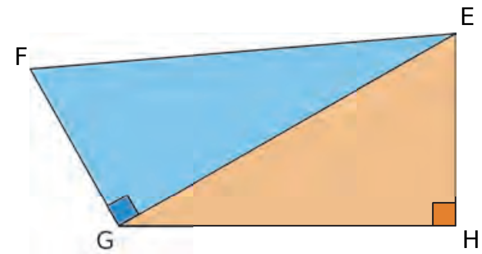
b. Calcule la longueur FG.

25 Calcule la longueur KM. (Donne une valeur approchée au mm près.)



26 ***Qui dit vrai ?***

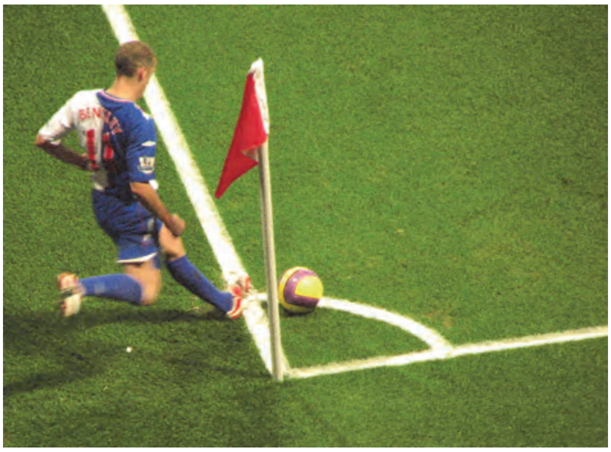
27 Recopie et complète les égalités associées à la figure suivante.



$EF^2 = ...^2 + ...^2$	$FG^2 = ...^2 - ...^2$	$EG^2 = ...^2 - ...^2$
$EG^2 = ...^2 + ...^2$	$GH^2 = ...$	$EH^2 = ...$

28 Un terrain de football rectangulaire a pour longueur 120 m et pour largeur 90 m.

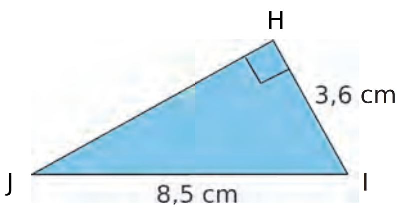
Calcule la distance séparant deux points de corner diagonalement opposés.



29 RST est un triangle rectangle en R tel que TS = 10 cm et RT = 7 cm.

Calcule la longueur du côté [RS]. (Donne une valeur approchée au mm près.)

30 Calcule la longueur JH.



31 NPV est un triangle rectangle en P tel que PV = 3,5 cm et NV = 6 cm.

a. Construis ce triangle en vraie grandeur.

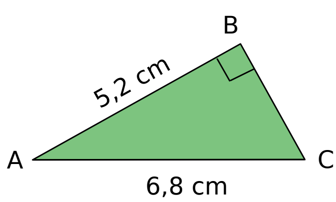
b. Calcule la longueur PN. (Donne une valeur approchée au mm près.)

32 ***Calcul de longueurs***

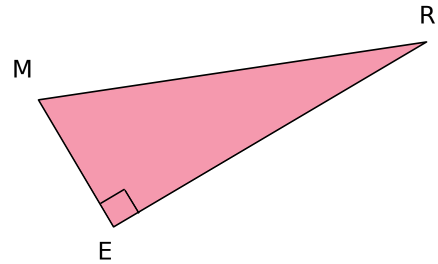
a. Le triangle MNP est rectangle en M avec MN = 5,2 m et MP = 4,8 m.
Calcule une valeur approchée au dixième de NP.

b. Calcule RT dans le triangle RST, rectangle en T tel que ST = 60 mm et RS = 10,9 cm.

c. Calcule BC. Donne une valeur approchée au centième près.



33 MER est un triangle rectangle en E.



Recopie et complète le tableau suivant, qui présente plusieurs cas possibles. (Tu écriras le détail de tes calculs et tu donneras une valeur approchée au dixième si nécessaire.)

	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5
MR	...	...	5,3 cm	9,1 cm	7 m
RE	15 cm	36 cm	...	9 cm	... m
ME	8 cm	7,7 dm	2,8 cm	...	53 cm

34 Théo veut franchir, avec une échelle, un mur de 3,50 m de haut devant lequel se trouve un fossé rempli d'eau, d'une largeur de 1,15 m.

a. Fais un schéma de la situation.

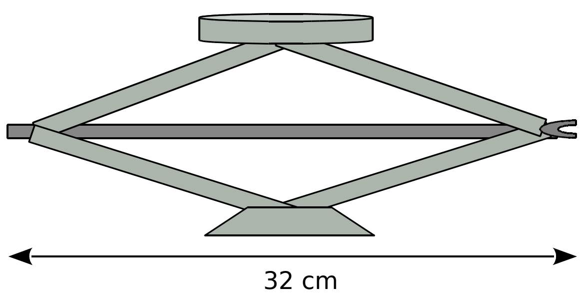
b. Il doit poser l'échelle sur le sommet du mur. Quelle doit être la longueur minimum de cette échelle ? Arrondis au cm.

35 Un massif de fleurs a la forme d'un triangle rectangle et le jardinier veut l'entourer d'une clôture. Au moment de l'acheter, il s'aperçoit qu'il a oublié de mesurer un des côtés de l'angle droit.

Les deux seules mesures dont il dispose sont, en mètres : 6,75 et 10,59.

Aide le jardinier à calculer la longueur de la clôture qu'il doit acheter.

36 Le cric d'une voiture a la forme d'un losange de 21 cm de côté.



À quelle hauteur soulève-t-il la voiture lorsque la diagonale horizontale mesure 32 cm ?

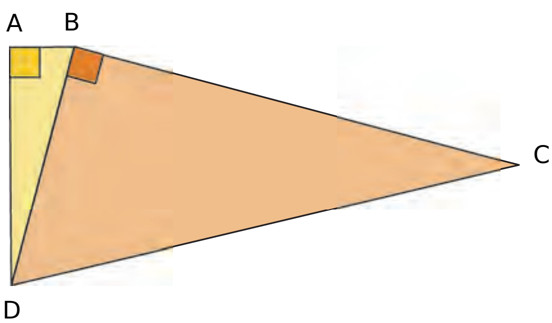
37 ***L'arc pour enfant***

La corde élastique au repos a une longueur de 60 cm.

a. Quelle est la nouvelle longueur de la corde si on l'écarte de 11 cm en la tirant par son milieu ? Arrondis au cm.

b. Il est conseillé de ne pas tirer la corde de plus de 8 cm. Quel est, en cm, l'écartement maximal conseillé ?

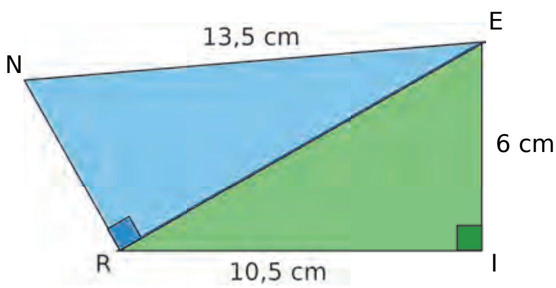
38 On considère cette figure où AB = 1,5 cm ; AD = 6 cm et BC = 12 cm.



a. Calcule BD^2.

b. Calcule DC.

39 ***L'aire de RIEN***



a. Reproduis cette figure en vraie grandeur.

b. Les longueurs NR et EI sont-elles égales ? Justifie ta réponse.

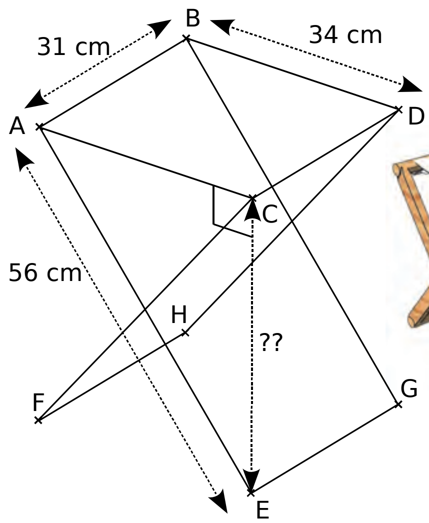
c. Calcule l'aire du quadrilatère RIEN.

40 **TICE Géométrie Dynamique**

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construis la figure de l'exercice **29** puis vérifie les résultats obtenus.

41 Pour une bonne partie de pêche au bord du canal, il faut un siège pliant adapté ! Nicolas est de taille moyenne et, pour être bien assis, il est nécessaire que la hauteur de l'assise de son siège soit comprise entre 44 cm et 46 cm.

Voici les dimensions d'un siège pliable qu'il a trouvé en vente sur Internet :
- longueur des pieds : 56 cm ;
- largeur de l'assise : 34 cm ;
- profondeur de l'assise : 31 cm.

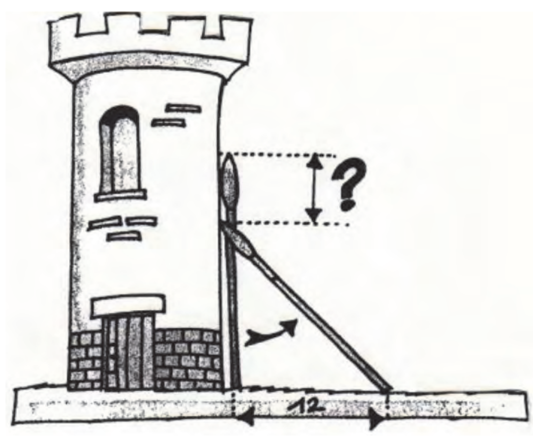


L'angle $\widehat{ACE}$ est droit et ABDC est un rectangle. La hauteur de ce siège lui est-elle adaptée ?

42 Voici l'énoncé d'un problème attribué à Léonard de Pise, dit Fibonacci, mathématicien italien du Moyen Âge.

Une lance, longue de 20 pieds*, est posée verticalement le long d'une tour considérée comme perpendiculaire au sol. Si on éloigne l'extrémité de la lance qui repose sur le sol de 12 pieds de la tour, de combien descend l'autre extrémité de la lance le long du mur ?

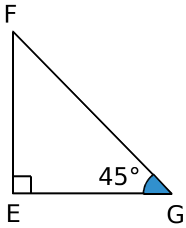
*Un pied est une unité de mesure anglo-saxonne valant environ 30 cm.



43 EFG est un triangle rectangle en E tel que EG = 7 cm et $\widehat{FGE}$ = 45°.

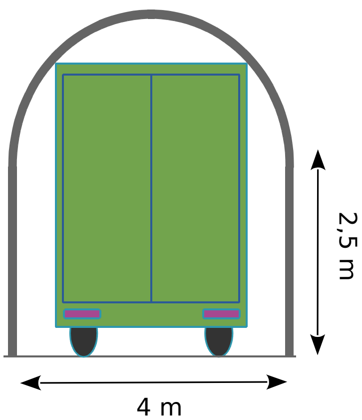
a. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$.

b. Calcule, en justifiant, le périmètre du triangle EFG. (Donne une valeur approchée au dixième si nécessaire.)



44 Une échelle de 2,50 m est appuyée contre un mur vertical. Le sommet de l'échelle atteint alors une hauteur de 2,35 m. Mais l'échelle glisse, de 30 cm en hauteur. De quelle distance a-t-elle glissé horizontalement ?

45 Un tunnel à sens unique, d'une largeur de 4 m, est constitué de deux parois verticales de 2,50 m de haut, surmontées d'une voute semi-circulaire de 4 m de diamètre. Un camion de 2,60 m de large doit le traverser.



Quelle hauteur maximale ce camion ne doit-il pas dépasser ?

46 ***Bricolage***

Ludo a monté une armoire à plat, au sol, dans sa chambre. La notice indique les dimensions suivantes : 80 cm de large, 2,15 m de haut. Pour redresser l'armoire, Ludo appelle son frère qui se demande soudain si l'opération sera possible. En effet, chez Ludo, la hauteur sous plafond est de 2,20 m. A-t-il raison de s'inquiéter ?

Démontrer qu'un triangle est rectangle ou non

47 Voici l'énoncé d'un problème.

ABC est un triangle tel que : BC = 25 cm ; AB = 24 cm et AC = 7 cm. Démontre que le triangle ABC est un triangle rectangle.

Quentin a rendu cette copie :

Je sais que dans le triangle ABC, [BC] est le plus long côté donc :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$25^2 = 24^2 + 7^2$
$625 = 576 + 49$
$625 = 625$
Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est bien rectangle en A.

a. Explique pourquoi le raisonnement de Quentin est incorrect.

b. Recopie la démonstration de Quentin en la corrigeant.

48 Dans chacun des cas suivants, démontre que le triangle ABC est un triangle rectangle. Précise à chaque fois en quel point.

	AB	AC	BC
a.	52 cm	39 cm	65 cm
b.	3,25 m	3,97 m	2,28 m
c.	8,9 dm	3,9 dm	80 cm

49 Donne tous les triangles rectangles dont les mesures des côtés se trouvent parmi les valeurs suivantes.

6 cm — 8,2 cm — 10 cm

1,8 cm — 5 cm — 8 cm

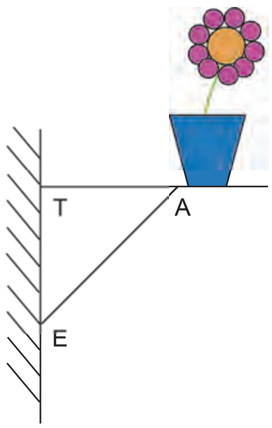
50 ***L'équerre a ses limites !***

a. Construis un triangle MNP tel que MN = 3 cm ; NP = 5 cm et PM = 4 cm.

b. Construis un triangle RST isocèle en R tel que RS = RT = 5 cm et ST = 7 cm.

c. En utilisant son équerre, Alexis prétend que ces deux triangles sont rectangles. Es-tu du même avis ? Détaille ta démarche.

51 Sur un mur vertical, Arnaud a installé une étagère pour y poser un pot de fleurs.

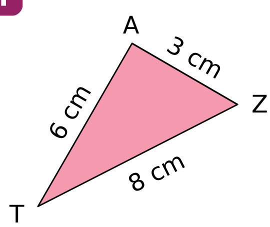


Les mesures qu'il a utilisées sont les suivantes : AT = 42 cm ; AE = 58 cm et TE = 40 cm.

L'étagère d'Arnaud est-elle horizontale ? Justifie.

52 QCM

a.



R.1	R.2	R.3
AZT est rectangle	AZT n'est pas rectangle	On ne peut pas savoir

b. Si $SG^2 + GK^2 = SK^2$, alors SGK est rectangle...

R.1	R.2	R.3
en K	en G	en S

c. Si HT = 5,7 cm, HR = 9,5 cm et TR = 7,6 cm, alors RTH...

R.1	R.2	R.3
est rectangle en T	est rectangle en H	n'est pas rectangle

53 Voici la copie d'Akino :

« $AB^2 = 3{,}64^2$ $AC^2 + BC^2 = 0{,}27^2 + 3{,}65^2$
$AB^2 = 13{,}2496$ $AC^2 + BC^2 = 0{,}0729 + 13{,}3225$
$AC^2 + BC^2 = 13{,}3954$

Donc $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$. Comme l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, alors ABC n'est pas rectangle. »

Est-ce juste ? Justifie ta réponse et corrige cette copie le cas échéant.

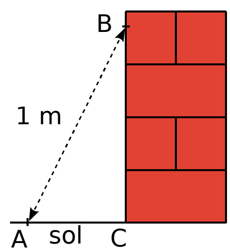
54 ***Triangle rectangle ou pas ?***

Dans chacun des cas suivants :

- identifie le plus long côté du triangle EFG ;
- calcule, d'une part, le carré de la longueur de ce côté ;
- calcule, d'autre part, la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés ;
- compare les résultats obtenus et conclus.

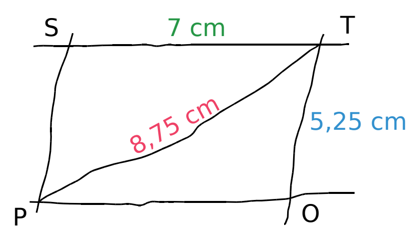
	EF	FG	EG
a.	4,5 cm	6 cm	7,5 cm
b.	3,6 cm	6 cm	7 cm
c.	64 mm	72 mm	65 mm
d.	3,2 dam	25,6 m	19,2 m

55 Pour apprendre son métier, un apprenti maçon a monté un mur en briques, de 0,90 m de hauteur. Son patron arrive pour vérifier son travail : il marque un point B sur le mur, à 80 cm du sol, et un point A, à 60 cm du pied du mur. Il mesure alors la distance entre les points A et B et obtient 1 m.



L'apprenti a-t-il construit un mur parfaitement perpendiculaire au sol ? Justifie.

56 On considère le parallélogramme STOP ci-dessous, dessiné à main levée.



Démontre que le parallélogramme STOP est un rectangle.

57 Construis en vraie grandeur un triangle OUI tel que : UI = 5 cm ; UO = 1,4 cm et OI = 4,8 cm.

a. Construis les points T et N symétriques respectifs des points U et I par la symétrie de centre O.

b. Quelle semble être la nature de NUIT ? Démontre ta conjecture.

58 Vrai ou Faux

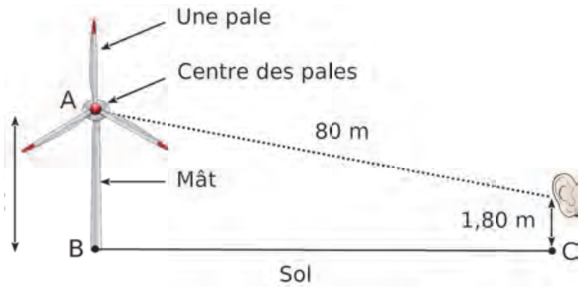
P.1. Si un triangle a pour dimensions 10 cm, 9 cm et 8 cm, alors son hypoténuse est le côté de longueur 10 cm.

P.2. Si EF^2 est différent de $EG^2 + GF^2$, alors EFG ne peut pas être un triangle rectangle.

P.3. Il suffit de connaitre la longueur d'un côté, dans un triangle rectangle isocèle, pour trouver les deux autres.

P.4. La diagonale d'un rectangle est supérieure à sa longueur.

59 Le mât d'une éolienne mesure 35 m de haut. On estime qu'à 80 m du centre des pales, le niveau sonore est juste suffisant pour que l'on puisse entendre le bruit qu'elle produit. Un randonneur dont les oreilles sont à 1,80 m du sol se déplace vers l'éolienne et s'arrête dès qu'il entend le bruit qu'elle produit (voir la figure suivante).



(La figure n'est pas à l'échelle.)

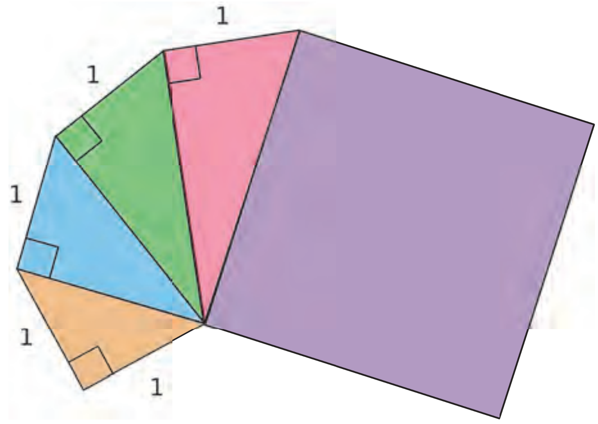
À quelle distance BC du mât de l'éolienne se trouve-t-il ? Donne une valeur approchée à l'unité.

60 *Les plumeaux brisés*

a. Un plumeau a été brisé par le vent. Son sommet touche la terre à 4 dm de la tige restée verticale, et la partie brisée de la tige mesure 6 dm. Quelle était la hauteur du plumeau avant qu'il se brise ?

b. Un autre plumeau a été brisé. Il mesurait 15 dm de haut et son sommet touche la terre à 9 dm de la tige restée verticale. À quelle hauteur a-t-il été brisé ?

61 *Spirale de Pythagore*



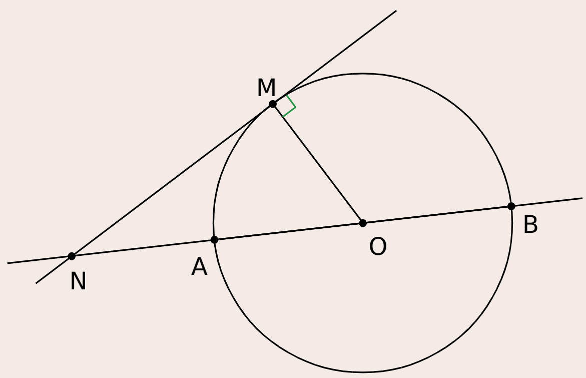
Les mesures de la figure sont en cm (la figure n'est pas en vraie grandeur).

a. Quelle est l'aire du carré violet ?

b. Procède de la même façon pour construire un carré d'aire 10 cm².

62 TICE Géométrie Dynamique

a. Construis la figure suivante.



- M appartient à un cercle de diamètre [AB] et de centre O.
- La perpendiculaire à [OM] passant par M coupe (AB) en N.

b. Dans quels cas, ne peut-on pas construire le point N ?

c. Affiche les longueurs NA, NB et NM.

d. Affiche NM^2 et $NA \times NB$ et déplace les points de la figure. Que peux-tu conjecturer ?

e. Démontre que :
$NM^2 = (ON - OM) \times (ON + OM)$.

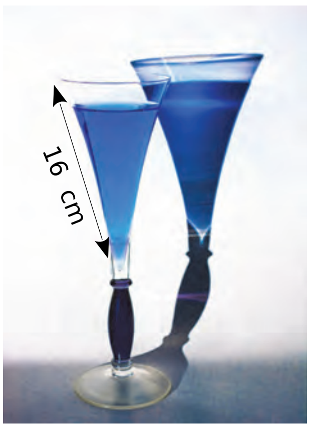
f. Déduis-en que $NM^2 = NA \times NB$.

g. Construis une figure sur ton cahier, en choisissant astucieusement les longueurs, de telle manière que la longueur de MN soit égale à $\sqrt{21}$ cm.

63 ***Allumettes***

Dans une boite d'allumettes de dimensions 5,3 cm × 3,6 cm × 1,5 cm, est-il possible de ranger une allumette mesurant 6,5 cm sans la briser ?

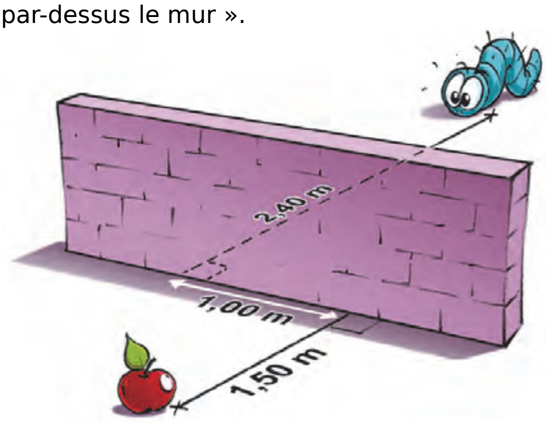
64 ***Cocktail***



Un verre à cocktail est assimilé à un cône de révolution, de diamètre 8 cm et de génératrice 16 cm.

Quelle quantité de liquide peut-on y verser ? Tu donneras une valeur approchée au centilitre près.

65 Maya la chenille irait bien déguster la pomme rouge. Mais un mur, haut de 1,40 m et épais de 20 cm, l'en empêche. Il lui faut passer « par-dessus le mur ».

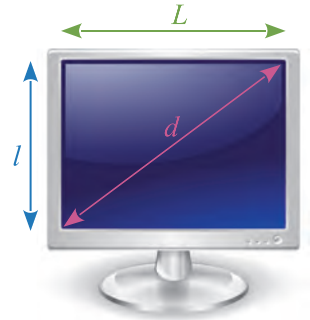


Quelle est la longueur du plus court trajet ?

66 ***Le bon format***

Pour répertorier ses moniteurs, un brocanteur relève leurs caractéristiques, notamment leurs longueurs et leurs largeurs :
L_1 = 30,6 cm et l_1 = 23 cm ;
L_2 = 34,6 cm et l_2 = 26 cm.

Or, dans son logiciel, la taille des moniteurs est répertoriée selon la diagonale des écrans en pouces.



a. Sachant qu'un pouce (noté 1") vaut 2,54 cm, retrouve les tailles d_1 et d_2 des moniteurs, en pouces, arrondies à l'unité.

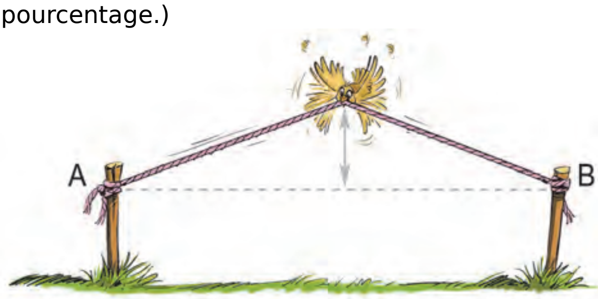
b. Le brocanteur va recevoir un nouveau moniteur de 21". Il veut retrouver ses dimensions l et L. Son employé lui dit : « C'est simple car il n'existe qu'un seul rectangle de diagonale donnée. ». Prouve qu'il a tort.

On sait d'autre part que :

$L = \frac{4}{3}l$ (tu pourras utiliser $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$)

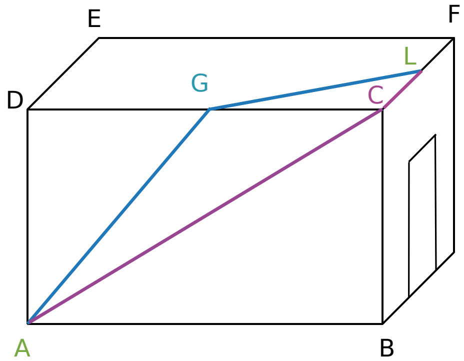
Trouve alors les valeurs l et L.

67 Une corde de longueur L (en mètres) est tendue horizontalement entre deux points A et B.
On ajoute 1 mètre à cette corde : elle n'est donc plus tendue entre les points A et B. On la retend en la tirant, par son milieu, vers le haut.
On s'intéresse à la hauteur qu'atteint le milieu de la corde allongée quand elle est retendue.
Montre sur plusieurs exemples (avec plusieurs valeurs de L) que, plus la proportion de corde ajoutée (1 mètre) par rapport à la longueur de corde initiale (L) diminue, plus cette hauteur augmente.
(Tu exprimeras cette proportion sous forme de pourcentage.)



68 La pièce d'une maison a la forme d'un pavé droit dont les dimensions sont :
AB = 5 m ; BC = 2,5 m et DE = 4 m.

Joris doit amener un câble du point A au point L, milieu de [CF]. Il hésite entre les deux possibilités représentées ci-dessous, où G est le milieu de [DC].



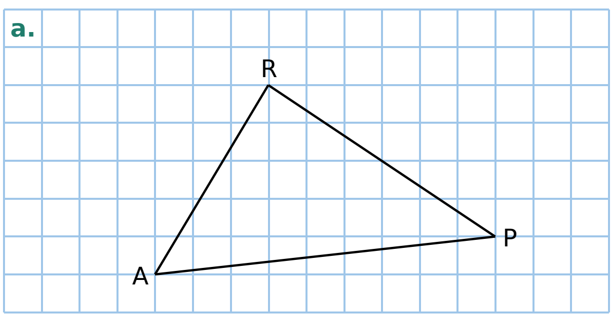
en bleu, de A vers G puis de G vers L ;
en violet, de A vers C puis de C vers L.

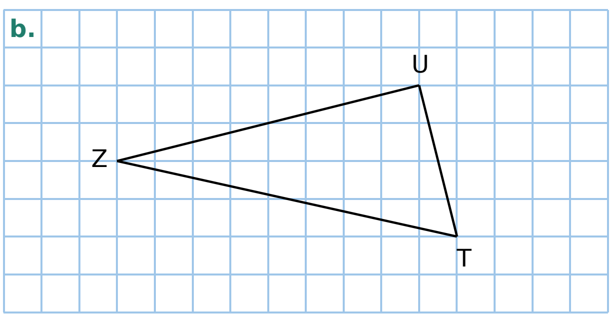
a. Dans quel cas utilisera-t-il le moins de câble ? Justifie.

b. Construis sur une même figure, à l'échelle 1/100, les faces ABCD et CDEF.
Représente les deux possibilités pour le passage du câble.

c. Joris peut-il utiliser encore moins de câble ? Sur la figure précédente, représente le passage du câble de longueur minimum. Justifie ton tracé et calcule cette longueur.

69 ***Dans un quadrillage***





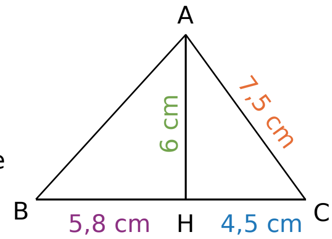
Les triangles RAP et ZUT sont-il rectangles ?
Si oui, précise en quel point et justifie ta réponse.

70 ABC est un triangle tel que : AC = 7,5 cm ; BH = 5,8 cm ; CH = 4,5 cm et AH = 6 cm, avec H ∈ [BC].

a. Fais une figure en vraie grandeur.

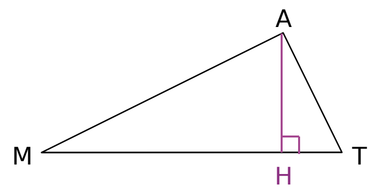
b. Démontre que ACH est rectangle en H.

c. Calcule le périmètre et l'aire du triangle ABC.



71 La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur, les points M, H et T sont alignés et on dispose des longueurs suivantes :

AH = 46 mm ;
HT = 23 mm ;
MH = 92 mm.



a. Calcule la longueur AT puis la longueur AM.

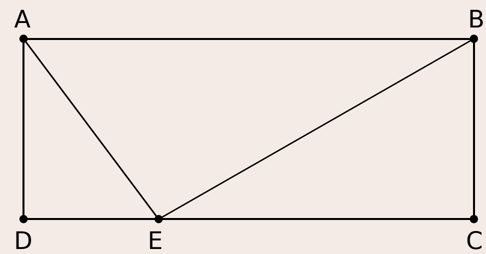
b. Démontre que le triangle MAT est rectangle en A.

c. Calcule l'aire du triangle MAT de deux façons différentes.

72 **TICE Géométrie Dynamique**

Dans un logiciel de géométrie dynamique, affiche la grille et masque les axes.

a. En utilisant le quadrillage, construis un rectangle ABCD tel que : AB = 10 et AD = 4.
Place un point E sur le côté [BC] et affiche l'angle $\widehat{AED}$.



b. Le triangle AED peut-il être rectangle ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de BE ?

c. Démontre que, pour les valeurs que tu as trouvées, le triangle AED est effectivement rectangle.

d. En t'aidant de la figure dynamique, à partir de quelle valeur de la largeur AB ne peut-on plus trouver de tels triangles rectangles ?

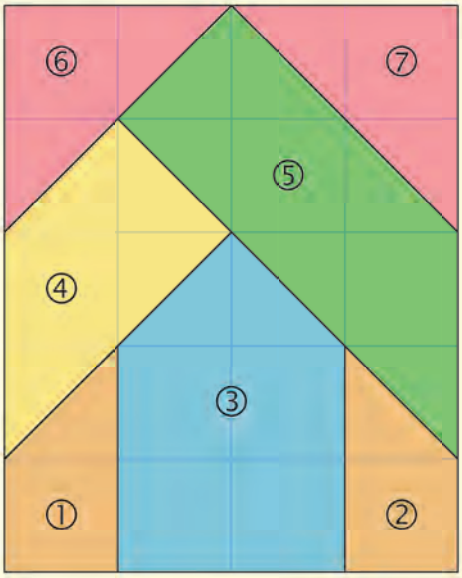
e. Pour cette valeur limite, quelle est la position du point E ?

f. Construis alors la figure correspondante et explique simplement pourquoi le triangle AED est rectangle.

Le Brise-Croix

Le Brise-Croix est un casse-tête chinois comportant 7 pièces, qui ressemble au Tangram.

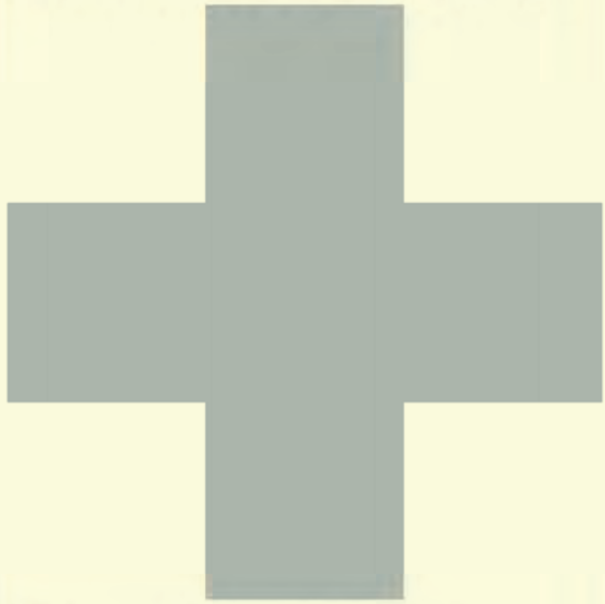
a. Reproduis ce Brise-Croix, sachant qu'un carreau du quadrillage mesure deux centimètres de côté. Puis découpe chaque pièce.



b. Donne la mesure exacte des côtés de chacune des sept pièces.

c. Donne la valeur exacte de l'aire de chacune des sept pièces.

Certaines figures du Brise-Croix sont difficiles à construire. C'est le cas de cette croix grecque.



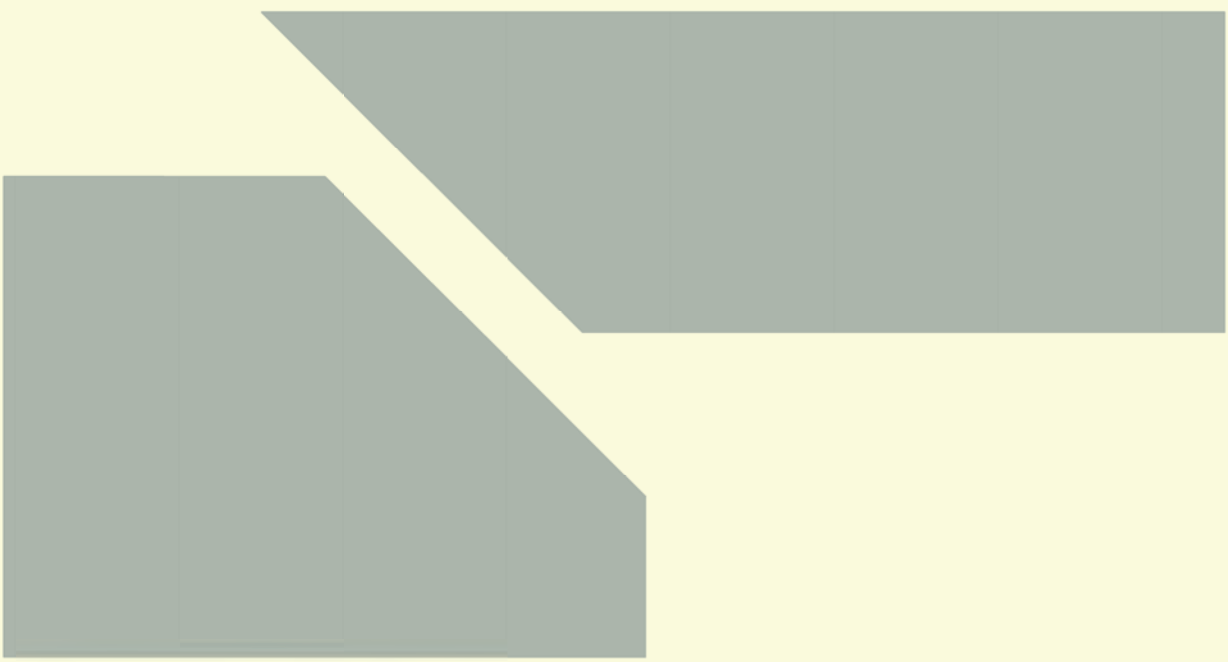
Mais les mathématiques vont t'aider !

d. Quelle est l'aire de cette croix ?

e. Que peux-tu en déduire sur les côtés constituant le périmètre de cette croix ?

f. Tu peux maintenant tenter de construire la croix grecque.

g. En assemblant les pièces, essaie de former chacun de ces polygones. Détermine ensuite leurs dimensions.



G2

Cosinus

Activités

1 Côté adjacent

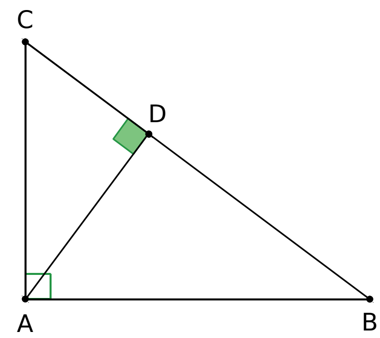
Cours : 1

a Nomme les différents triangles rectangles de cette figure et précise leur hypoténuse.

Dans un triangle rectangle, le côté adjacent à un angle aigu est le côté joignant le sommet de l'angle droit au sommet de l'angle aigu.

b Précise le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$ dans le triangle ABC, puis dans le triangle ADC.

c Précise le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABD}$ dans le triangle ABC, puis dans le triangle ABD.



2 Cosinus d'un angle aigu

Cours : 2

TICE Géométrie Dynamique

a Construis cette figure.

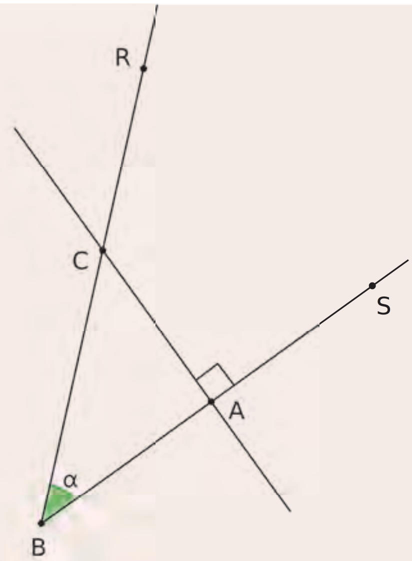
- Trace deux demi-droites [BR) et [BS) telles que l'angle $\widehat{SBR} = \alpha$ est aigu ;
- Place un point C quelconque sur la demi-droite [BR) ;
- Trace la perpendiculaire à [BS) passant par C. Elle coupe la demi-droite [BS) en A. Place le point A.

b Affiche les longueurs BA et BC.

c Calcule et affiche le rapport $\frac{BA}{BC}$.

d Calcule le cosinus de l'angle α.

e Déplace le point R, puis le point C.
Que remarques-tu ?



f ABC est un triangle rectangle en A. Quelle égalité liant la longueur de l'hypoténuse, le cosinus et la longueur d'un côté adjacent peux-tu conjecturer ?

3 Une valeur remarquable

Cours : 3

a Construis un triangle équilatéral ABC de côté 6 cm et construis la hauteur (AH), où H est le pied de la hauteur issue de A.
En utilisant la propriété suivante : "*Si deux triangles ont deux côtés de même longueur compris entre deux angles de même mesure deux à deux, alors ces deux triangles sont isométriques*", explique pourquoi les triangles ABH et ACH sont isométriques.

b Déduis-en la longueur BH puis la valeur exacte de cos 60°.

1 Vocabulaire

→ 10

Définition Dans un triangle rectangle, le **côté adjacent à un angle aigu** est le côté reliant le sommet de l'angle droit au sommet de l'angle aigu.

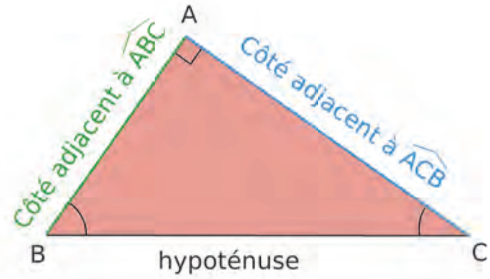
Exemple :

L'angle droit est $\widehat{BAC}$.

Les deux angles aigus sont : $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Le côté adjacent à l'angle aigu $\widehat{ABC}$ est le côté [AB].

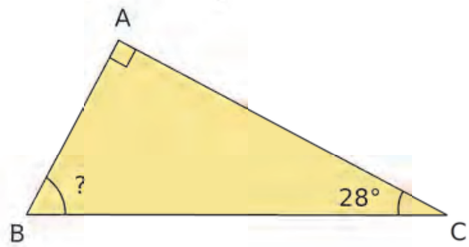
Le côté adjacent à l'angle aigu $\widehat{ACB}$ est le côté [AC].



Remarques :

- Le côté adjacent à un angle aigu d'un triangle rectangle n'est jamais l'hypoténuse.
- Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont **complémentaires**, c'est-à-dire que la somme de leur mesure vaut 90°.

  Ainsi, lorsqu'on connait la mesure d'un des angles aigus d'un triangle rectangle, la mesure de l'autre angle aigu s'obtient par simple soustraction. Par exemple, dans le triangle ABC ci-dessous, si l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 28°, alors l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 90° − 28°, soit 62°.



2 Cosinus d'un angle aigu

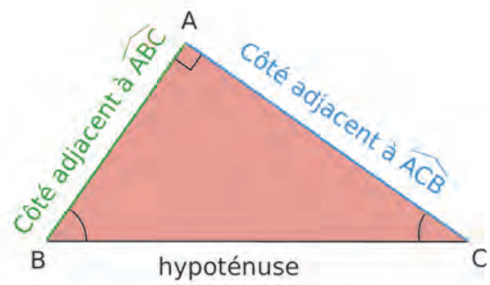
→ 11

Propriété Dans un triangle rectangle, le **cosinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

Exemple :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ACB}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$



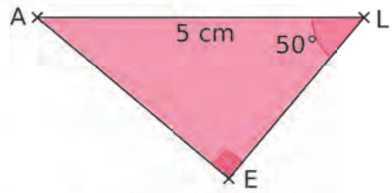
Remarque :

Comme l'hypoténuse est le plus grand des côtés du triangle, le cosinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1.

3 Utiliser la formule du cosinus

→ 22 34

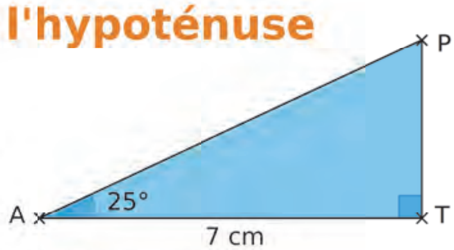
A Pour calculer la longueur du côté adjacent



Exemple :
Dans le triangle LEA rectangle en E, on connait la longueur de l'hypoténuse AL, ainsi que la mesure de l'angle $\widehat{ELA}$.
Il est possible de calculer la longueur EL.

$\cos \widehat{ELA} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{ELA}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{EL}{LA}$	⟶	On écrit le cosinus de l'angle connu. La longueur cherchée doit apparaitre dans le rapport.
$EL = LA \times \cos \widehat{ELA}$	⟶	On applique la règle des produits en croix.
$EL = 5 \times \cos 50°$	⟶	On vérifie que la calculatrice est en degrés. On saisit 5 × [arccos / cos] 50.
$EL \approx 3{,}2$ cm	⟶	On donne une valeur approchée du résultat de la calculatrice.

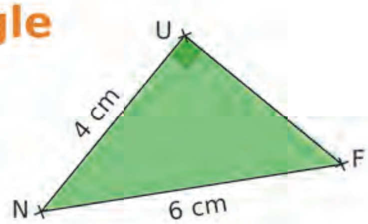
B Pour calculer la longueur de l'hypoténuse



Exemple :
Dans le triangle TAP rectangle en T, on connait la mesure de l'angle $\widehat{PAT}$ et la longueur AT du côté adjacent à l'angle $\widehat{PAT}$.
Il est possible de calculer la longueur PA de l'hypoténuse.

$\cos \widehat{PAT} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{PAT}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AT}{PA}$	⟶	On écrit le cosinus de l'angle connu.
$PA = \dfrac{AT}{\cos \widehat{PAT}}$	⟶	On applique la règle des produits en croix.
$PA = \dfrac{7}{\cos 25°}$	⟶	On vérifie que la calculatrice est en degrés. On saisit 7 ÷ [arccos / cos] 25.
$PA \approx 7{,}7$ cm	⟶	On donne une valeur approchée du résultat de la calculatrice.

C Pour calculer la mesure de l'angle



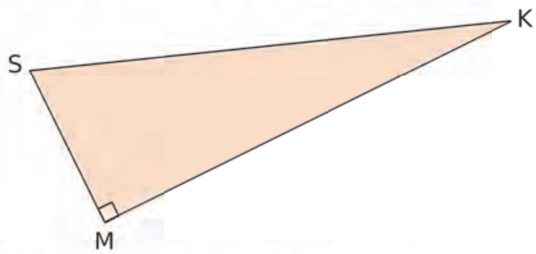
Exemple :
Dans le triangle FUN rectangle en U, on connait la longueur de l'hypoténuse NF et la longueur NU du côté adjacent à l'angle $\widehat{UNF}$. Il est possible de calculer la mesure de l'angle aigu $\widehat{UNF}$.

$\cos \widehat{UNF} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{UNF}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{NU}{NF}$	⟶	On écrit le cosinus de l'angle cherché.
$\cos \widehat{UNF} = \dfrac{4}{6}$	⟶	On remplace chaque longueur par sa valeur numérique.
$\widehat{UNF} \approx 48°$	⟶	On saisit, selon le modèle de calculatrice, [2nde] puis [arccos / cos] (4 ÷ 6), et on donne une valeur approchée du résultat de la calculatrice.

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 On considère ce triangle rectangle.

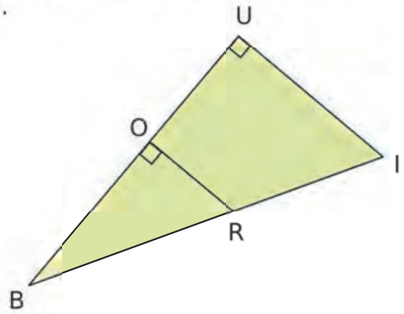


a. Quelle est son hypoténuse ?

b. Quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{MSK}$?

c. Quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{MKS}$?

2 Pour chaque triangle rectangle ci-dessous, énonce deux phrases avec l'expression « côté adjacent ».



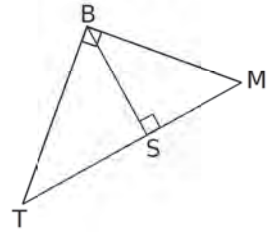
3 Soit EDP un triangle rectangle en P. Associe les expressions égales.

$\cos \widehat{DEP}$ $\quad \frac{DP}{DE}$ $\quad \frac{EP}{DP}$ $\quad \frac{DE}{DP}$ $\quad \cos \widehat{EDP}$ $\quad \frac{EP}{ED}$ $\quad \frac{DE}{EP}$

4 Effectue le produit en croix pour déterminer, dans chaque cas ci-dessous, la valeur de x.

a. $0{,}1 = \frac{x}{13}$ **b.** $0{,}8 = \frac{4}{x}$ **c.** $0{,}3 = \frac{x}{3}$

5 On considère cette figure.

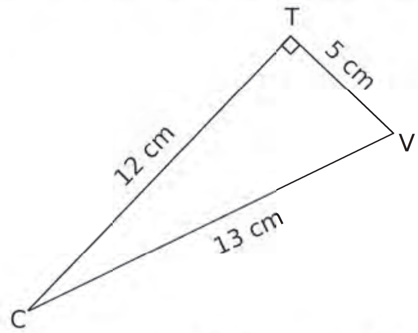


Exprime de deux façons différentes :

a. le cosinus de l'angle $\widehat{BTM}$;

b. le cosinus de l'angle $\widehat{BMT}$.

6 On considère ce triangle rectangle.



a. Combien vaut $\cos \widehat{TCV}$? Et $\cos \widehat{TVC}$?

b. Donne une mesure arrondie au degré des deux angles aigus de ce triangle.

7 Soit MVS un triangle rectangle en S, tel que $\widehat{SMV} = 60°$. Sachant que $\cos 60° = 0{,}5$...

a. calcule MV si SM = 10 cm ;

b. calcule SM si MV = 8 cm.

c. Que remarques-tu ?

8 **Vrai ou Faux**

P.1. Si EDK est rectangle en K, alors le côté adjacent à $\widehat{EDK}$ est [ED].

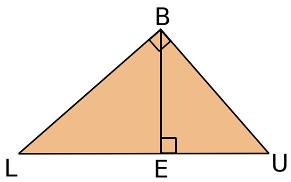
P.2. $\cos 2° = 2$

P.3. Si le triangle MRG est rectangle en M, alors $\cos \widehat{GRM} = \frac{RM}{RG}$.

P.4. $\hat{a}$ est un angle aigu tel que $\cos \hat{a} = \frac{9}{7}$.

Définition du cosinus

9 ***Attention aux triangles !***

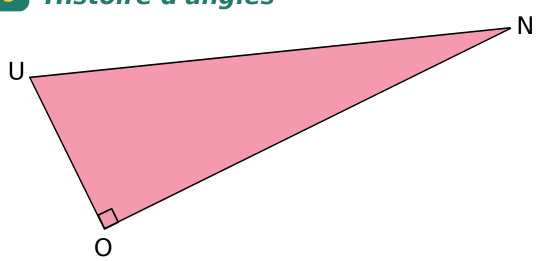


a. Dans le triangle rectangle BEU :
- quelle est l'hypoténuse ?
- quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BUE}$?
- quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{EBU}$?

b. Dans le triangle rectangle BEL :
- quelle est l'hypoténuse ?
- quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BLE}$?
- quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{EBL}$?

c. Dans le triangle rectangle BLU :
- quelle est l'hypoténuse ?
- quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BLU}$?
- quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BUL}$?

10 ***Histoire d'angles***



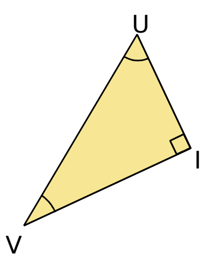
a. Dans le triangle ONU :
- quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ONU}$?
- quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{OUN}$?

b. Écris sous forme d'un rapport de longueurs le cosinus de l'angle $\widehat{ONU}$ et celui de l'angle $\widehat{OUN}$.

11 Exprime chaque quotient sous la forme du cosinus correspondant.

a. $\frac{UI}{UV}$

b. $\frac{VI}{VU}$



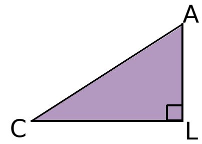
12 SEL est un triangle rectangle en S.

a. Écris le cosinus de l'angle $\widehat{SEL}$ sous forme d'un rapport de longueur.

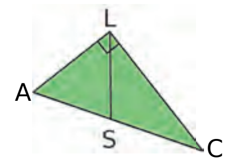
b. Même question pour l'angle $\widehat{SLE}$.

13 Dans chaque cas ci-dessous, écris, si possible, le cosinus de l'angle $\widehat{LAC}$.

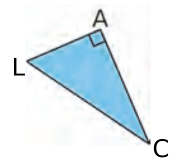
a.



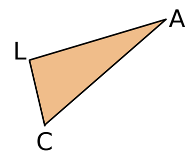
b.



c.



d.



14 MPBK est un losange de centre I.

a. Donne tous les triangles rectangles de cette figure. Justifie.

b. Choisis l'un d'eux et exprime le cosinus de ses angles aigus.

15 Donne la valeur approchée au centième des cosinus suivants.

cos 78°   cos 35°   cos 56°   cos 12°

16 Donne, si possible, la valeur approchée à l'unité de la mesure des angles dont le cosinus vaut :

0,5   0,1   0,78   1,7

17 Recopie puis complète avec des valeurs approchées au dixième.

Angle (en degrés)	26			72
Cosinus de l'angle		0,7	0,01	

18 **QCM**

a. ETR est rectangle en R, alors [ER] est le côté...

R.1	R.2	R.3
adjacent à $\widehat{ETR}$	adjacent à $\widehat{ERT}$	adjacent à $\widehat{RET}$

b. LZI est rectangle en L, alors cos $\widehat{LZI}$ =

R.1	R.2	R.3
$\frac{LZ}{LI}$	$\frac{ZL}{ZI}$	$\frac{IL}{IZ}$

c. Quel nombre peut être le cosinus d'un angle ?

R.1	R.2	R.3
$\frac{9}{4}$	9,9	$\frac{5}{9}$

Calculs de longueurs

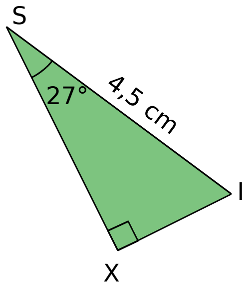
19 Détermine, dans chaque cas ci-dessous, la longueur AB (arrondis au dixième si nécessaire).

a. $0{,}2 = \dfrac{AB}{8}$ **b.** $0{,}6 = \dfrac{6{,}2}{AB}$ **c.** $0{,}9 = \dfrac{AB}{0{,}5}$

20 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\cos 60° = \dfrac{AB}{3{,}2}$ **b.** $\cos 20° = \dfrac{1{,}1}{AB}$

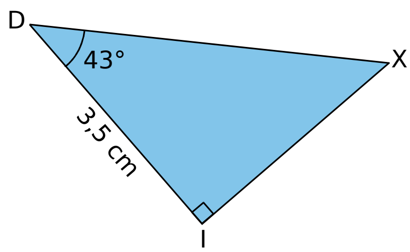
21 Soit le triangle SIX ci-contre.



a. Écris le cosinus de l'angle $\widehat{ISX}$ sous forme d'un rapport de longueurs.

b. Déduis-en la longueur SX, au millimètre près.

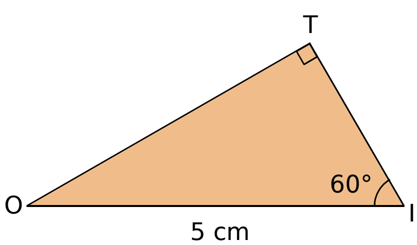
22 Soit le triangle DIX ci-dessous.



a. Écris le cosinus de l'angle $\widehat{IDX}$.

b. Déduis-en l'arrondi au dixième de la longueur DX.

23 Soit le triangle TOI ci-dessous.



a. Écris le cosinus de l'angle $\widehat{TIO}$.

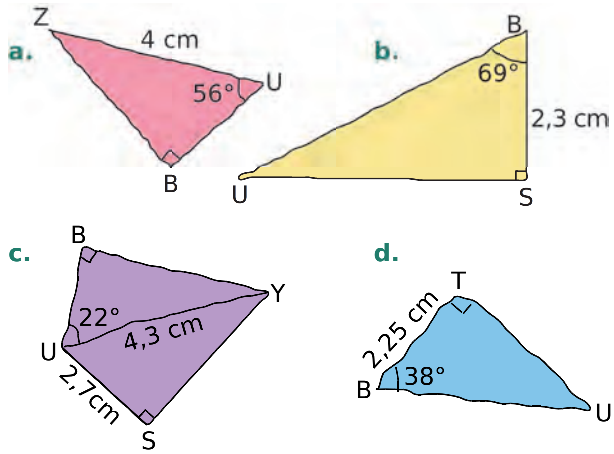
b. Déduis-en la longueur TI.

c. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{TOI}$?

d. Écris le cosinus de l'angle $\widehat{TOI}$.

e. Déduis-en la longueur TO.

24 Dans chaque cas ci-dessous, calcule BU (donne l'arrondi au dixième).



25 BON est un triangle rectangle en O, tel que ON = 4 cm et $\widehat{ONB}$= 40°.
Donne l'arrondi au centième de BN.

26 TER est un triangle rectangle en E, tel que TR = 6 cm et $\widehat{TRE}$= 50°.
Donne l'arrondi au centième de ER.

27 **QCM**

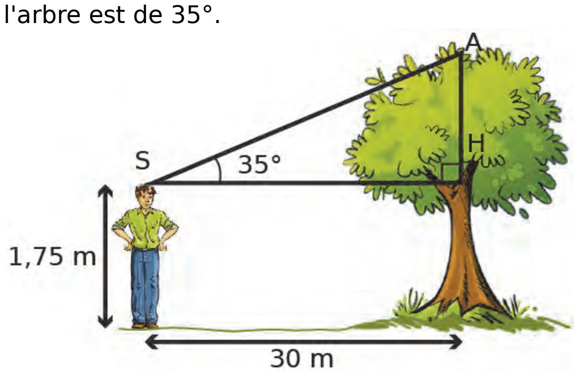
a. Si $\cos 17° = \dfrac{3{,}9}{BT}$, alors BT =

R.1	R.2	R.3
$3{,}9 \times \cos 17°$	$\dfrac{3{,}9}{\cos 17°}$	$\dfrac{17}{\cos 3{,}9°}$

b. $6{,}5 \times \cos 12° \approx$

R.1	R.2	R.3
78	6,4	5,5

28 Stefan, qui mesure 1,75 m, est à 30 m d'un arbre. L'angle entre l'horizontale et le sommet de l'arbre est de 35°.



a. Donne l'arrondi au centième de AH.

b. Déduis-en la hauteur de l'arbre.

Calculs d'angles

29 Calcule, au degré près, la mesure des angles ci-dessous.

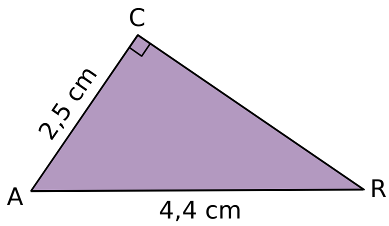
a. $\cos \widehat{ASB} = 0{,}65$ **b.** $\cos \widehat{FTG} = 0{,}11$

c. $\cos \widehat{EHP} = \dfrac{2{,}9}{5{,}1}$ **d.** $\cos \widehat{BRM} = \dfrac{4}{4{,}8}$

30 Soit le triangle CAR ci-dessous.

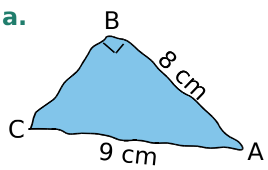
a. Écris le cosinus de l'angle $\widehat{CAR}$.

b. Déduis-en la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{CAR}$.

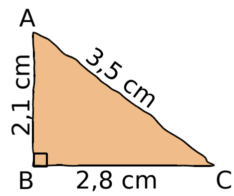


31 Dans chaque cas ci-dessous, calcule, si possible, la mesure de $\widehat{BAC}$, arrondie à l'unité.

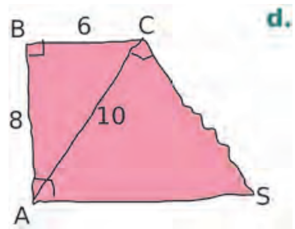
a.



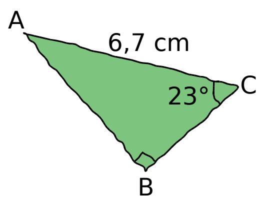
b.



c.

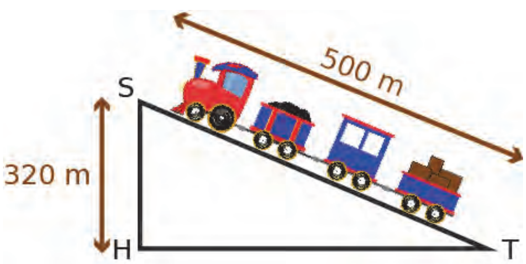


d.



32 FER est un triangle rectangle en E tel que FE = 3 cm ; ER = 4 cm et FR = 5 cm. Donne l'arrondi au dixième des angles de ce triangle.

33 Pour s'élever de 320 m, un train parcourt une montée de 500 m.

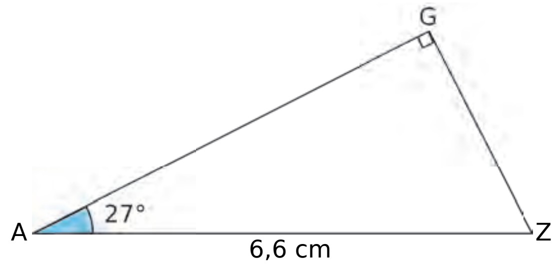


a. Détermine l'arrondi à l'unité de $\widehat{TSH}$.

b. Déduis-en l'arrondi à l'unité de l'inclinaison de la pente par rapport à l'horizontale.

Calculs d'angles et de longueurs

34 Soit le triangle GAZ ci-dessous.



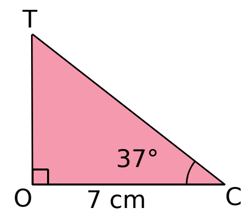
a. Détermine la valeur de $\widehat{GZA}$.

b. Donne l'arrondi au dixième de GZ.

35 Soit le triangle TOC ci-contre.

a. Calcule la longueur TC, arrondie au dixième.

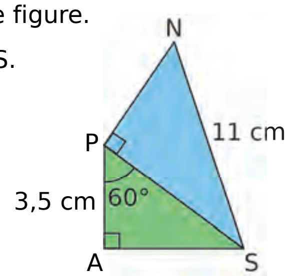
b. Déduis-en la longueur TO, arrondie au millimètre.



36 On considère cette figure.

a. Calcule la longueur PS.

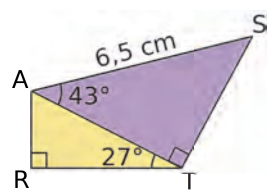
b. Déduis-en la mesure des angles $\widehat{PSN}$ et $\widehat{PNS}$, arrondie au degré.



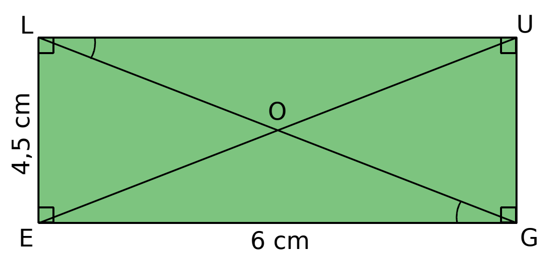
37 On considère cette figure.

a. Calcule AT. Tu en donneras l'arrondi au millimètre.

b. Déduis-en la mesure de RT arrondie au millimètre.



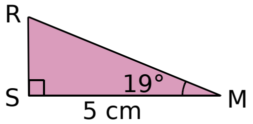
38 Calcule la mesure des angles $\widehat{LGE}$ et $\widehat{GLU}$. Tu arrondiras les résultats au degré.



39 **QCM**

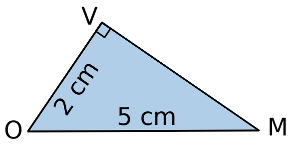
a. Si $\cos \widehat{BTS} = 0{,}8$ alors $\widehat{BTS}$ ...

R.1	R.2	R.3
$\approx 0{,}6°$	$\approx 36{,}9°$	$= 36{,}86°$

b. 

RM =

R.1	R.2	R.3
$5 \times \cos 19°$	$\dfrac{5}{\cos 19°}$	$\dfrac{\cos 19°}{5}$

c. 

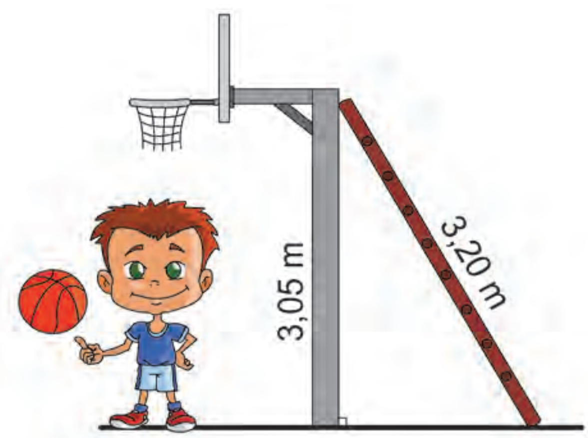
$\widehat{VMO} \approx$

R.1	R.2	R.3
66°	24°	90°

40 ***Panier de basket***

Paul veut installer chez lui un panneau de basket. Il doit le fixer à 3,05 m du sol. L'échelle dont il se sert mesure 3,20 m de long.

a. À quelle distance du pied du mur doit-il placer l'échelle pour que son sommet soit juste au niveau du panier ? Donne une valeur approchée au centimètre près.



b. Calcule l'angle formé par l'échelle et le sol. Donne une valeur approchée au degré près.

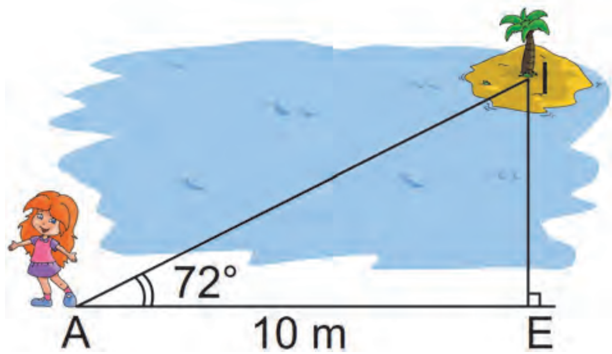
41 Une bille roule sur la largeur d'une table rectangulaire de 80 cm de large.
Lorsque la bille arrive au milieu de la largeur de la table, un ventilateur la dévie de son parcours d'un angle de 20°.
Quelle longueur parcourt finalement la bille ?

42 ***Histoire de bougies !***

a. Sur le gâteau d'anniversaire de Luc, une bougie de 5 cm de hauteur n'était pas plantée verticalement. Elle a déposé de la cire à 1 cm de son pied.
Quel est son angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale ?

b. Le support plastique de la bougie a un rayon de 0,4 cm. De combien peut-on, au maximum, incliner la bougie pour que la cire ne tombe pas sur le gâteau ?

43 Armelle voudrait connaitre la distance qui la sépare de l'ilot. Elle vise un arbre de l'ile à partir de deux points du littoral, distants de 10 m. Voici les mesures qu'elle a prises :

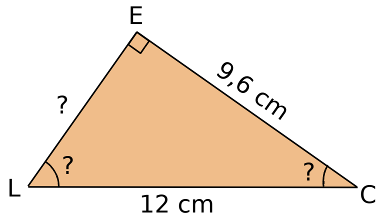


Peux-tu aider Armelle à résoudre son problème ?

44 Lors d'une étape du Tour de France, les coureurs doivent franchir le col du Tourmalet, situé à 2 115 m d'altitude. Le début de la montée commence à Sainte Marie de Campan, altitude 857 m. La distance à parcourir jusqu'en haut du col est de 17 km.

Calcule au degré près la mesure de l'angle $\widehat{TSH}$.

45 Calcule les mesures manquantes de la figure. Arrondis la mesure des angles au degré.



46 Soit GEF un triangle rectangle en E tel que EF = 7 cm et GF = 9 cm. Soit H le point de [EF] tel que EH = 3 cm. Soit I le point de [GF] tel que (HI) et (GE) soient parallèles.

a. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$, arrondie au degré.

b. Calcule la longueur FI arrondie au dixième. Justifie.

47 ***Par étapes***

a. Construis un triangle GAO tel que GA = 10,5 cm ; OG = 8,4 cm et AO = 6,3 cm.

b. Quelle est la nature de GAO ? Justifie.

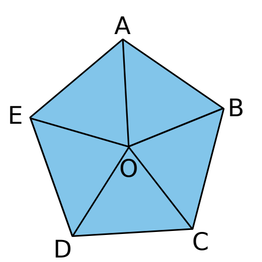
c. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{AGO}$, arrondie au degré.

48 On veut calculer le périmètre du pentagone régulier ci-dessous.
Ce polygone est constitué de cinq triangles isocèles tels que :

OA = OB = OC = OD = OE ;

AB = BC = CD = DE = EA.

On sait aussi que OA = 8 cm et $\widehat{AOB}$ = 72°.



a. Trace le triangle ABO sur une feuille blanche.

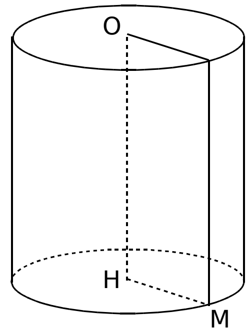
b. Trace la médiatrice de [AB]. Elle coupe [AB] en H.

c. Quelle est la mesure des angles $\widehat{AHO}$ et $\widehat{AOH}$? Pourquoi ?

d. Calcule la mesure de OH, arrondie au centième.

e. Déduis-en la mesure de AH, arrondie au centième.

49 On a représenté ci-dessous un cylindre de révolution de rayon de base HM = 9 cm et de hauteur OH = 17 cm.



a. Que peux-tu dire du triangle OMH ?

b. Calcule, en justifiant, la longueur OM.

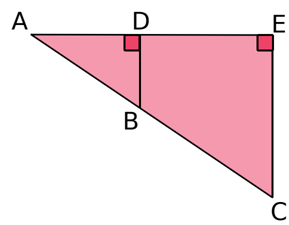
c. À partir des questions précédentes, déduis la mesure de l'angle $\widehat{HOM}$. Tu donneras le résultat arrondi au degré.

50 ***Trois angles***

a. Construis le triangle EFG tel que EF = 12 cm, EG = 5 cm et FG = 13 cm.

b. Détermine, en justifiant, la mesure (arrondie au degré) des trois angles du triangle EFG.

51 Les points A, B et C sont alignés, ainsi que les points A, D et E. Les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires à la droite (AE).
On a : AB = 2,5 cm ; BD = 1,5 cm et CE = 4,5 cm.

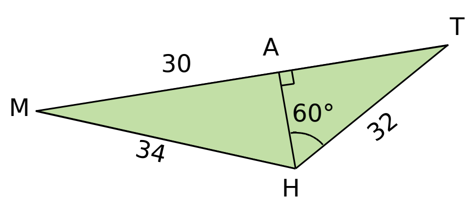


a. Calcule la longueur AD. Justifie.

b. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$, arrondie au degré. Justifie.

c. Calcule les longueurs AC et AE. Justifie.

52 Les points M, A et T sont alignés.



a. Calcule la longueur AH. Justifie.

b. Quelle est la nature du triangle MAH ?

c. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{AMH}$, arrondie au degré.

d. Calcule la longueur AT, arrondie au dixième, de deux manières différentes.

53 Jim traverse une rivière large de 45 m. Mais il est déporté par le courant : sa trajectoire est déviée de 20°.
Fais un schéma pour représenter la situation. Puis calcule la distance parcourue par Jim, arrondie au dixième.

(On suppose que les rives sont parallèles.)

54 Vrai ou Faux

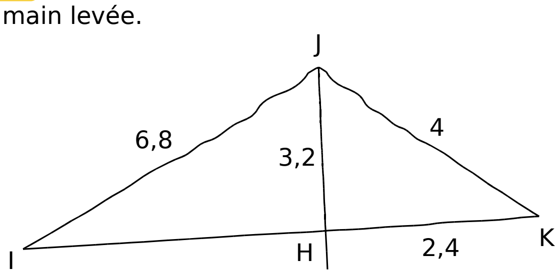
P.1. Pour a et b entre 0° et 90°, on a la relation : $\cos(a + b) = \cos a + \cos b$.

P.2. Entre 0° et 90°, plus un angle est petit, plus son cosinus est grand.

P.3. Il suffit de connaitre la longueur de deux côtés d'un triangle rectangle pour pouvoir calculer ses trois angles.

P.4. Le cosinus du double d'un angle est égal au double du cosinus de cet angle.

55 On considère la figure ci-dessous dessinée à main levée.



L'unité utilisée est le centimètre.
Les points I, H et K sont alignés.

a. Construis cette figure en vraie grandeur.

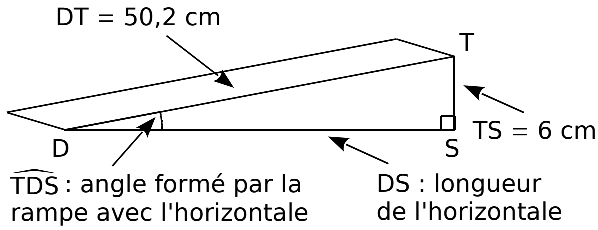
b. Démontre que les droites (IK) et (JH) sont perpendiculaires.

c. Démontre que IH = 6 cm.

d. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{HJK}$, arrondie au degré.

56 Une boulangerie veut installer une rampe d'accès pour des personnes à mobilité réduite. Le seuil de la porte est situé à 6 cm du sol.

Document 1 :
Schéma représentant la rampe d'accès



Document 2 :
Extrait de la norme relative aux rampes d'accès pour des personnes à mobilité réduite

La norme impose que la rampe d'accès forme un angle inférieur à 3° avec l'horizontale, sauf dans certains cas.

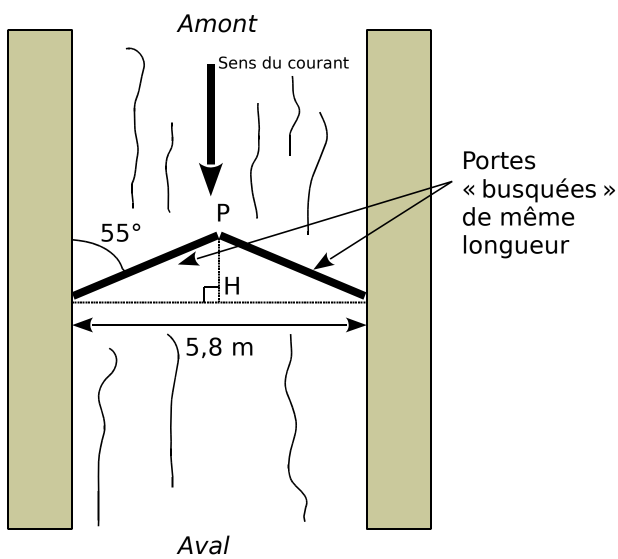
Cas particuliers :

L'angle formé par la rampe avec l'horizontale peut aller :

- jusqu'à 5° si la longueur de l'horizontale est inférieure à 2 m.
- jusqu'à 7° si la longueur de l'horizontale est inférieure à 0,5 m.

Cette rampe est-elle conforme à la norme ?

57 Certaines écluses ont des portes dites « busquées », qui forment un angle pointé vers l'amont de manière à résister à la pression de l'eau.



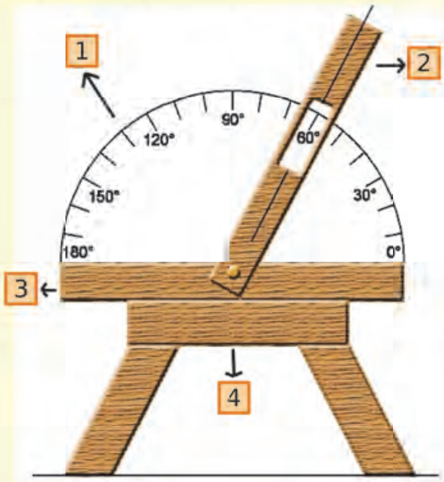
En t'appuyant sur le schéma ci-dessus, détermine la longueur des portes au cm près.

Théodolite

a. Recherche la définition d'un théodolite.
À quoi sert-il ? Dans quels domaines l'utilise-t-on ?

b. Construis un théodolite à l'aide des quelques indications ci-dessous.

- Matériel : carton, attaches parisiennes, ciseaux, rapporteur, petit bâton de bois.
- La pièce 1 est un demi-cercle en carton sur lequel on colle une photocopie d'un rapporteur.
- La pièce 2 est composée d'un morceau de carton avec une ouverture permettant de lire l'angle exprimé en degré. Le trait correspond au viseur (utilise le bâton en bois).
- Les pièces 3 et 4 constituent la base et le trépied afin de pouvoir poser le théodolite à la verticale (la pièce 4 est optionnelle).



c. Utilise ton théodolite pour mesurer la hauteur d'un bâtiment.

- Place ton théodolite sur un trépied. Il doit être parfaitement à la verticale (utilise un fil à plomb) et parfaitement à l'horizontale (utilise un niveau à bulle).
- Mesure la distance entre le théodolite et le pied du bâtiment. Mesure la hauteur du théodolite par rapport au sol.
- À l'aide de ton instrument, mesure l'angle formé entre l'horizontale et le haut du bâtiment.
- Avec toutes ces données, calcule la hauteur du bâtiment.

Al-Kashi

a. Recherche dans un dictionnaire, une encyclopédie ou sur Internet, des informations sur les mathématiciens Al-Kashi et Pythagore.

b. Al-Kashi est célèbre pour les formules suivantes qui portent son nom.

« Dans un triangle ABC, on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$,
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABC}$,
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{ACB}$. »

Explique pourquoi chacune de ces formules porte aussi le nom de « théorème de Pythagore généralisé ».

c. Construis un triangle ABC tel que : AB = 6 cm ; AC = 5 cm et $\widehat{BAC} = 45°$.
À l'aide des formules d'Al-Kashi, donne une valeur de BC arrondie au centième.

d. Même question avec AB = 8 cm ; AC = 6 cm et $\widehat{BAC} = 30°$.

G3

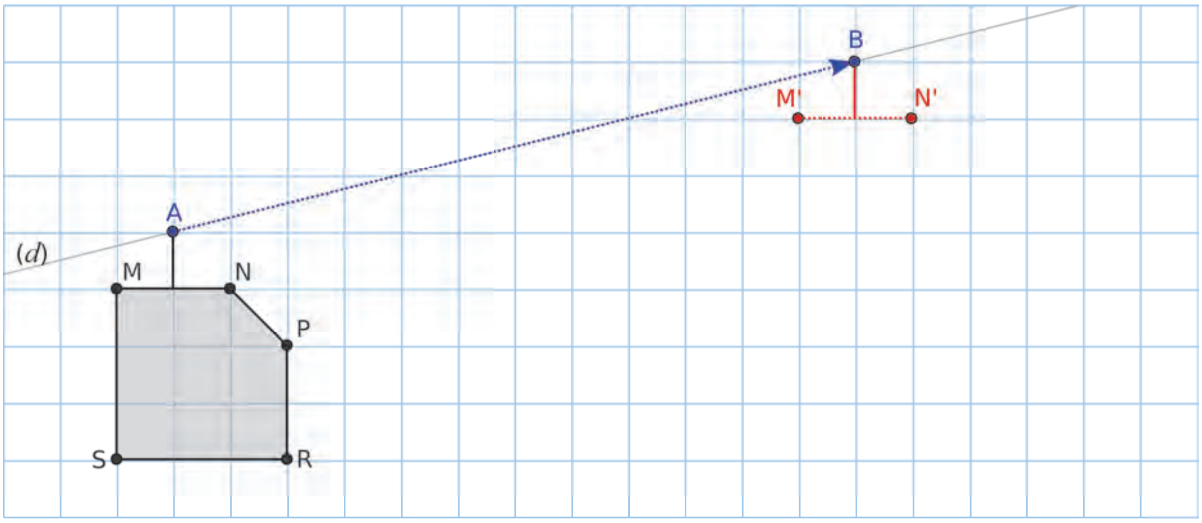
Translations, rotations

Activités

1 En cabine !

Cours : 1

La figure suivante représente le déplacement d'une cabine de téléphérique. La droite (d) représente le câble porteur, le point A représente le point d'attache de la cabine au câble au départ. À l'arrivée au sommet, ce point est représenté par le point B.



a Reproduis cette figure en t'aidant du quadrillage, puis complète la cabine dans sa position d'arrivée. Tu noteras respectivement P', R' et S' les points correspondant à la position d'arrivée des points P, R et S.

b Trace le segment [MM']. Que remarques-tu ? Fais apparaitre d'autres segments sur la figure ayant cette même particularité.

c Que peux-tu dire du quadrilatère ABM'M ? Nomme d'autres quadrilatères ayant cette particularité.

Le glissement permettant d'amener A en B est appelé translation qui transforme A en B.

d Quelle est l'image du segment [NP] par la translation qui transforme A en B ? Que remarques-tu concernant ce segment et son image ?

e Compare la figure MNPRS et son image par la translation qui transforme A en B.

2 Géométrie dynamique

Cours : 3

TICE Géométrie Dynamique

a Reproduis une figure analogue à celle de l'**activité 1**. Pour cela, place les points A et B, puis construis le polygone MNPRS. Le polygone M'N'P'R'S' sera créé en utilisant l'outil *Translation*.

b Compare le périmètre des polygones MNPRS et M'N'P'R'S' puis leur aire.

c Place trois points alignés, puis construis leur image par la translation qui transforme A en B. Que peux-tu dire des trois images ? **On dit que la translation conserve l'alignement.**

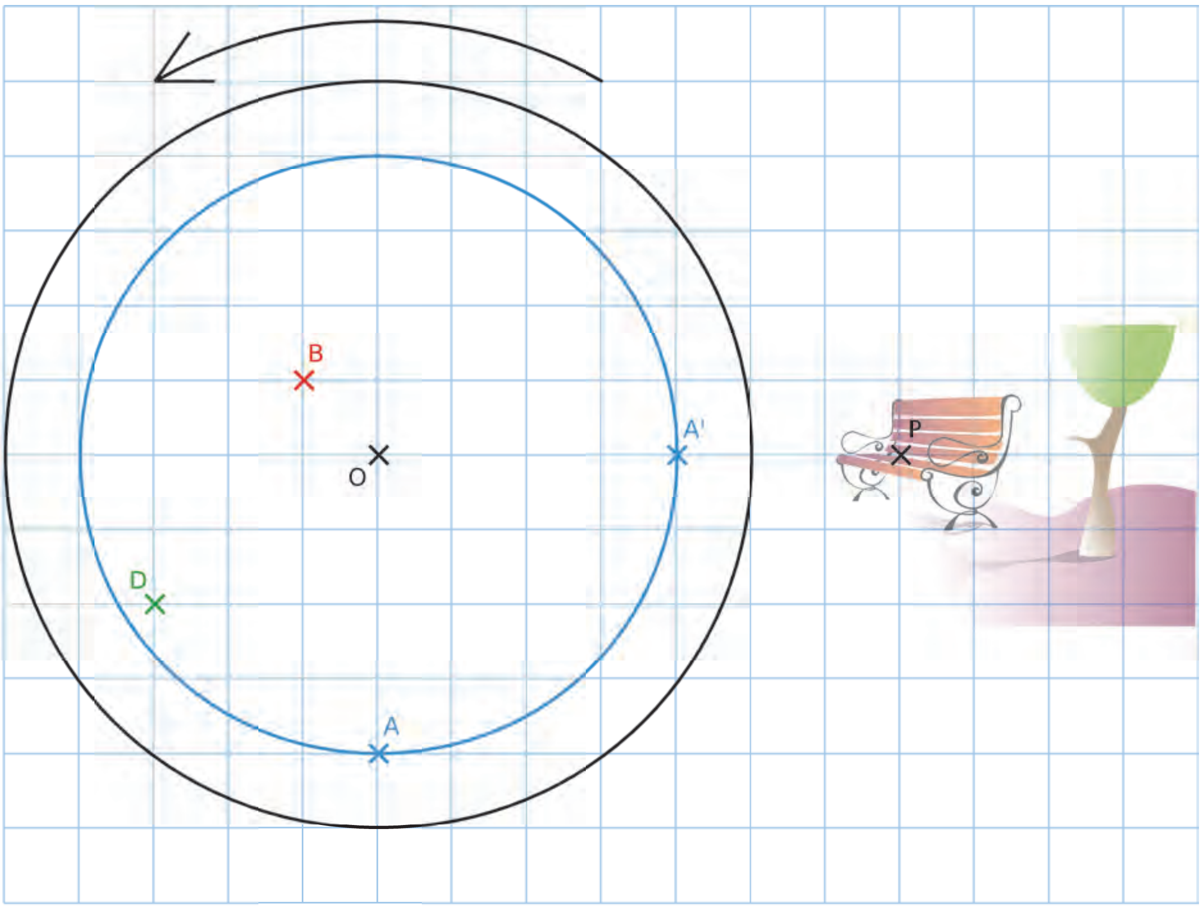
d À l'aide du logiciel, vérifie que la translation conserve également les milieux et la mesure des angles.

3 Silence ! Ça tourne !

Cours : 2

Alice est allée à la fête foraine avec ses parents et ses deux frères.

La figure suivante représente le manège sur lequel les trois enfants se sont installés. Alice est représentée par le point A. Ses frères, Boris et Davis, sont représentés respectivement par les points B et D. Ses parents se sont assis sur un banc pour prendre des photos. Leur position est représentée par le point P.



Le manège commence à tourner (dans le sens indiqué par la flèche). Les parents d'Alice prennent une photo au moment où Alice est face à eux, c'est-à-dire quand elle est au point A'.

a Décris le déplacement effectué par Alice entre le moment du départ et l'instant où la photo est prise.

Ce déplacement est appelé rotation de centre O qui transforme A en A'.

b Reproduis cette figure en t'aidant du quadrillage, puis construis le cercle sur lequel se déplace Davis pendant l'attraction. Place alors le point D', représentant la position de Davis au moment où la photo est prise.

c Sans construire de cercle, place le point B', représentant la position de Boris au même moment.

d Que dire de l'angle $\widehat{BOB'}$? Nomme un autre angle ayant cette particularité.

e Trace les segments [AD] et [A'D']. Que remarques-tu ?

f La rotation de centre O qui transforme A en A' est aussi appelée **quart de tour de centre O**. D'après toi, à quelle transformation géométrique connue correspond un demi-tour de centre O ?

Cours

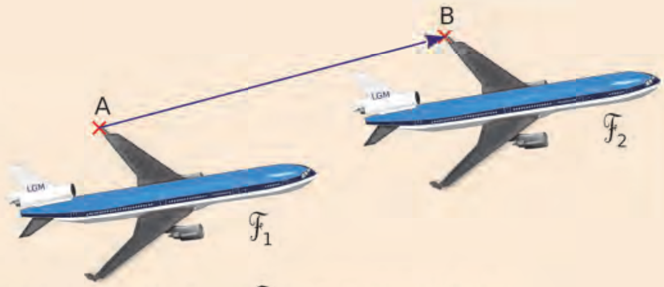
1 Translation

→ 11

A Définition

Définition

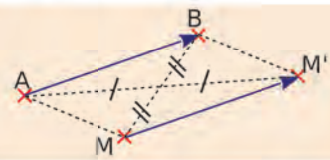
Lorsqu'on fait **glisser** la figure $\mathcal{F}_1$ (sans la faire tourner), de manière à ce que A arrive en B, elle se superpose avec la figure $\mathcal{F}_2$.



On dit que la figure $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}_1$ par la **translation** qui transforme A en B.

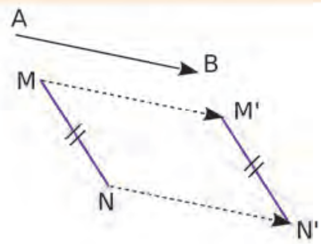
B Image d'un point et d'un segment

Propriété 1 L'image du point M, par la translation qui transforme A en B, est le point M', tel que les segments [MB] et [AM'] ont le même milieu. Si les points ne sont pas alignés, alors ABM'M est un parallélogramme.



Propriété 2 L'image d'un segment par une translation est un segment parallèle et de même longueur.

Exemple : Dans la translation qui transforme A en B, le segment [MN] a pour image [M'N']. Donc les segments [MN] et [M'N'] sont parallèles et de même longueur.



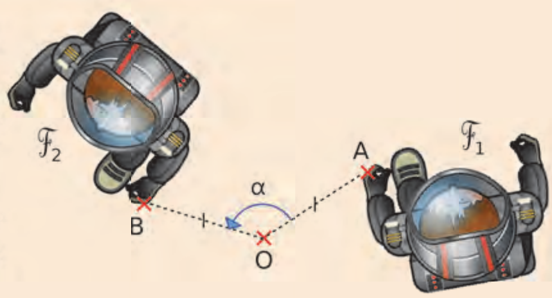
2 Rotation

→ 17

A Définition

Définition

Lorsqu'on fait **tourner** la figure $\mathcal{F}_1$ autour du point O, d'un angle de mesure α, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, elle se superpose avec la figure $\mathcal{F}_2$.
On dit que la figure $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}_1$ par la **rotation** de centre O et d'angle α.



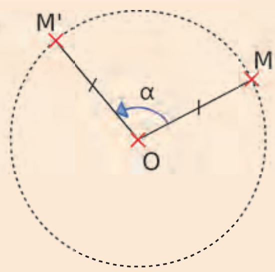
Remarques :

- Dans tout ce chapitre, le sens de rotation sera toujours le sens trigonométrique (sens contraire des aiguilles d'une montre).
- La rotation de centre O et d'angle 180° est la symétrie centrale de centre O.

B Image d'un point

Propriété Soient O et M deux points distincts.

L'image du point M, par la rotation de centre O et d'angle α, est le point M', tel que OM' = OM et $\widehat{MOM'} = \alpha$.



3 Propriétés

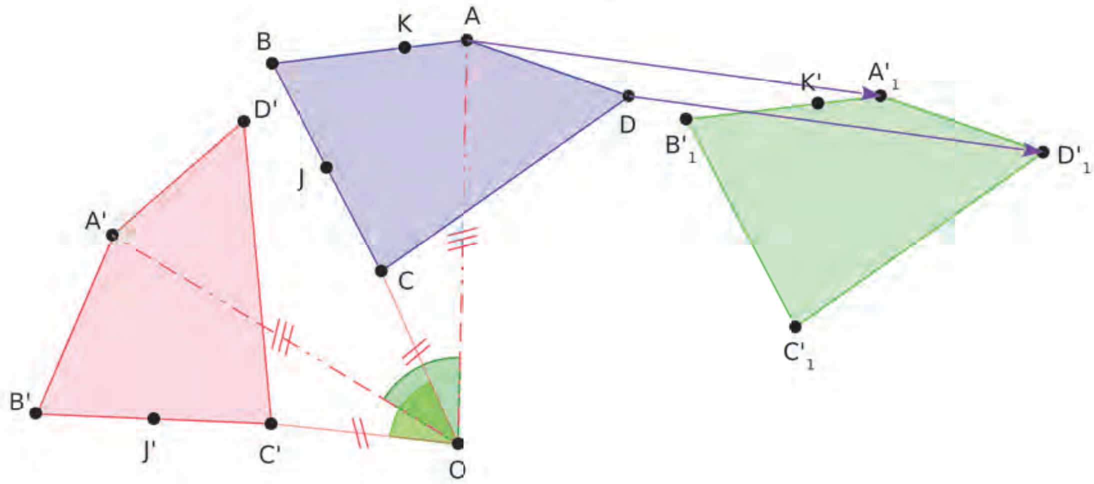
→ 40

Propriété Par une rotation ou une translation, une figure et son image se superposent.

La translation et la rotation **conservent** donc les **longueurs**, l'**alignement**, les **aires**, les **milieux** et les **mesures des angles**.

Exemple :

Le quadrilatère A'B'C'D' est l'image de ABCD par la rotation de centre O et d'angle 60°.
Le quadrilatère $A'_1B'_1C'_1D'_1$ est l'image de ABCD par la translation qui transforme A en A'_1.



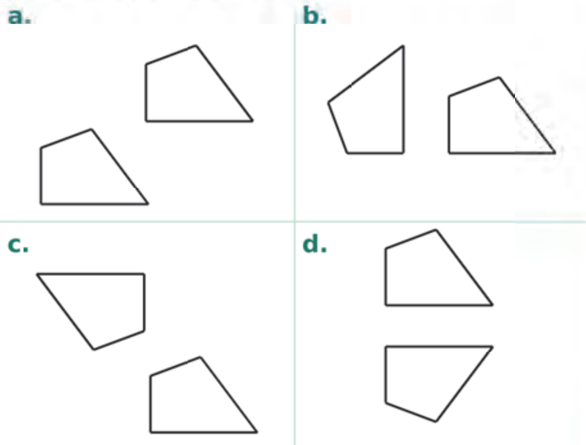
- Les aires et les périmètres des trois quadrilatères sont égaux.
- Les points A, B, K sont alignés, donc leurs images A'_1, B'_1, K'_1 sont également alignées.
- Le point J est le milieu du segment [BC], donc son image J' par la rotation est le milieu du segment [B'C'].
- L'angle $\widehat{A'_1B'_1C'_1}$ est l'image de l'angle $\widehat{ABC}$ par la translation, ils ont donc la même mesure.
- L'angle $\widehat{A'B'C'}$ est l'image de l'angle $\widehat{ABC}$ par la rotation, ils ont donc également la même mesure.

Exercices

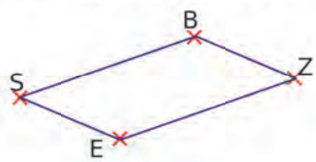
Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

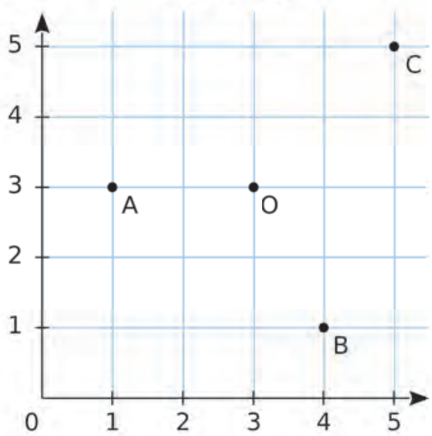
1 Dans chaque cas ci-dessous, indique par quel type de transformation on passe d'un quadrilatère à un autre.



2 SBZE est un parallélogramme. Propose trois phrases utilisant le mot « translation ».



3 On considère ce graphique.



a. Soient B_2 et C_2 les images respectives des points B et C, par la translation qui transforme O en A. Quelles sont leurs coordonnées ?

b. Soient A_1 et C_1 les images respectives des points A et C, par la rotation de centre O et d'angle 90°. Quelles sont leurs coordonnées ?

4 **QCM**

a. Soient A et B deux points. L'image de B par la translation qui transforme A en B est le point D, tel que...

R.1	R.2	R.3
D est le milieu de [AB]	A est le milieu de [BD]	B est le milieu de [AD]

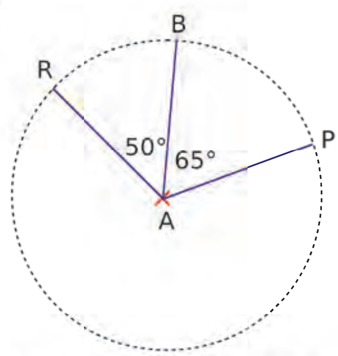
b. Si G est le milieu de [HR], alors H est l'image de R par...

R.1	R.2	R.3
la rotation de centre G et d'angle 180°	la translation qui transforme H en R	la rotation de centre G et d'angle 90°

c. Soit un carré de centre O. L'image du carré est le carré lui-même, par une rotation de centre O et d'angle...

R.1	R.2	R.3
45°	270°	100°

5 R, B et P sont trois points d'un cercle de centre A.



Propose trois phrases utilisant le mot « rotation ».

6 **Vrai ou Faux**

P.1. Par une rotation de centre A, l'image du point A est le point A lui-même.

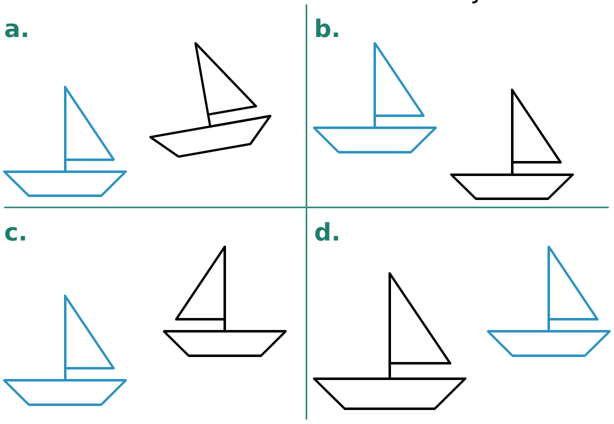
P.2. Une translation transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.

P.3. Une rotation d'angle 90° est une symétrie axiale.

P.4. Une rotation transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.

Définition de la translation

7 Rumi souhaite construire l'image du bateau bleu par une translation. Il fait les essais ci-dessous : ses tracés sont-ils corrects ? Justifie.



8 **QCM**

a. B est l'image de A par la translation qui transforme E en Z. Quels sont les segments de même milieu ?

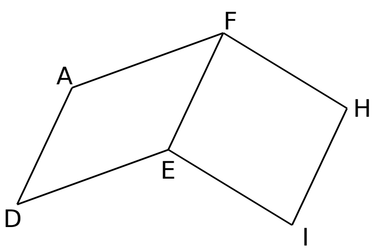
R.1	R.2	R.3
[EB] et [AZ]	[EA] et [BZ]	[EZ] et [AB]

b. Si MGRT est un parallélogramme, alors G est l'image de R par la translation qui transforme…

R.1	R.2	R.3
M en T	M en G	T en M

9 Soit EMKR un parallélogramme. Construis quatre phrases avec le mot « translation » en rapport avec cette figure.

10 AFED et FHIE sont deux parallélogrammes.



a. Quelle est l'image de E par la translation qui transforme E en I ?

b. Quelle est l'image de A par la translation qui transforme D en E ?

c. Quelle est l'image de E par la translation qui transforme F en H ?

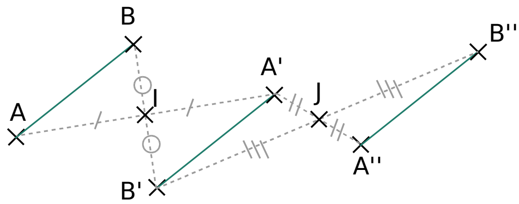
11 Soit ABCD un parallélogramme. Quelle est l'image de A par la translation qui transforme D en C ?

12 [EF] et [MN] sont deux segments de même milieu O.

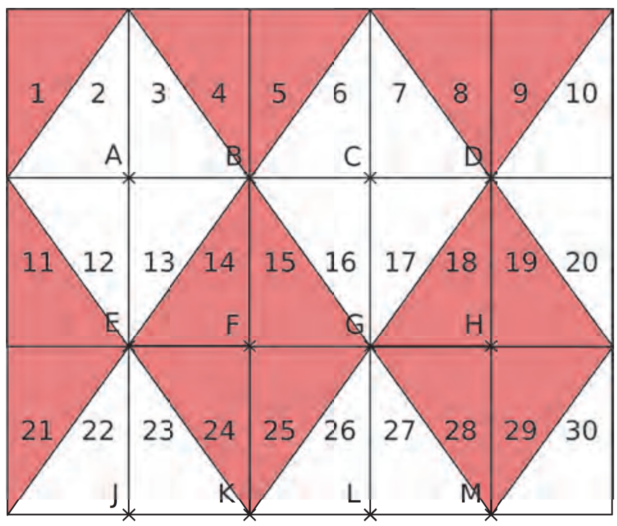
a. Quelle est l'image de E par la translation qui transforme N en F ? Explique.

b. Quelle est l'image de M par la translation qui transforme E en N ? Explique.

13 Quelle est l'image de B par la translation qui transforme A en A'' ? Démontre-le.



14 ***Pavage !***



a. Recopie puis complète le tableau.

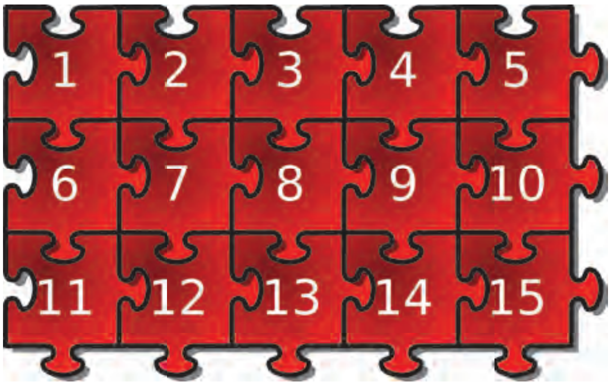
Le triangle n°		21	14	26		4
est l'image du triangle n°	3		2	6		24
par la translation qui transforme	A	G	A		F	
en	C	E		K	H	

b. Peut-on passer du triangle 1 au triangle 25 par une translation ? Si oui, laquelle ?

c. Peut-on passer du triangle 3 au 6 par une translation ? Si non, par quelle transformation ?

d. Peut-on passer du triangle 3 au 16 par une translation ? Si non, par quelle transformation ?

15 Observe bien le pavage ci-dessous.



a. Quelle est l'image de la pièce 3 par la translation qui transforme la pièce 6 en 8 ?

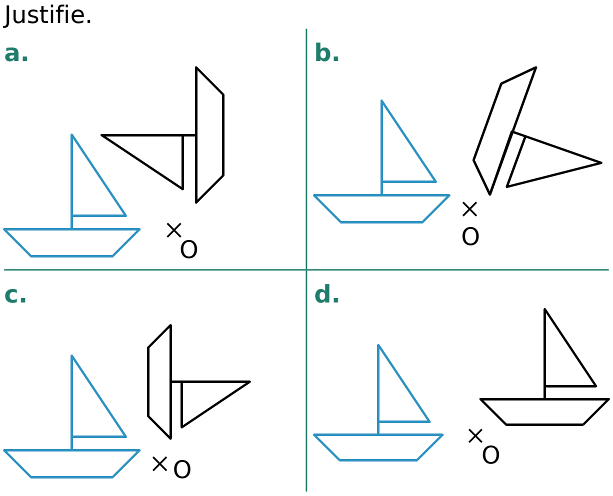
b. Quelle est l'image de la pièce 9 par la translation qui transforme la pièce 15 en 12 ?

c. Quelle est l'image de la pièce 5 par la translation qui transforme la pièce 3 en 13 ?

d. Quelle est l'image de la pièce 1 par la translation qui transforme la pièce 3 en 10 ?

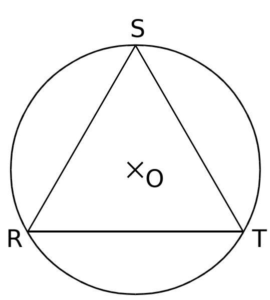
Définition de la rotation

16 Jane souhaite construire l'image du bateau bleu par une rotation de centre O. Elle fait les essais ci-dessous : ses tracés sont-ils corrects ? Justifie.

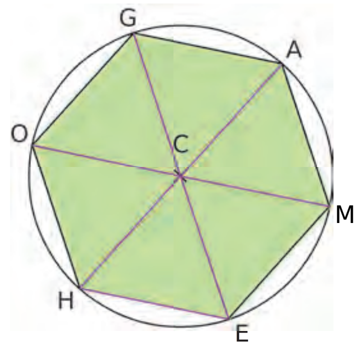


17 SRT est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de centre O.

Construis quatre phrases avec le mot « rotation » en rapport avec cette figure.

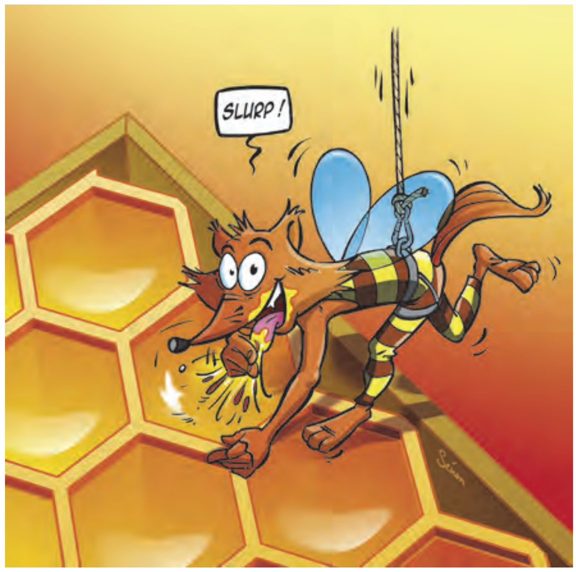


18 On considère l'hexagone régulier ci-dessous, constitué de six triangles équilatéraux.

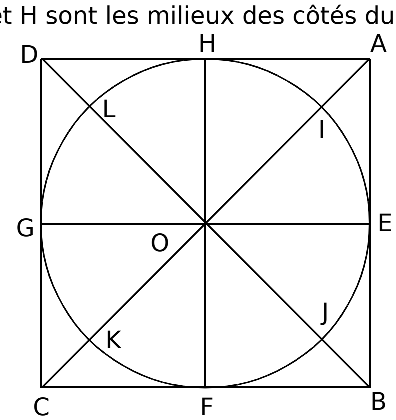


A est l'image d'un point de la figure par une rotation dont le centre est un autre point de la figure.

Propose six rotations avec au moins trois centres différents.



19 ABCD est un carré de centre O. Les points E, F, G et H sont les milieux des côtés du carré.



a. Quelles sont les images respectives de A, L, G et J, par la rotation de centre O et d'angle 90° ?

b. Quelles sont les images respectives de I, H, K et F, par la rotation de centre O et d'angle 45° ?

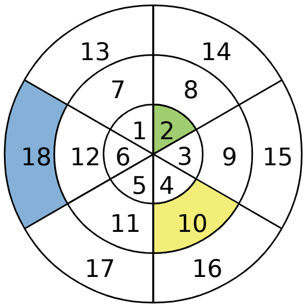
c. Détermine une rotation par laquelle I a pour image G.

d. Détermine une rotation par laquelle L a pour image J.

20 Observe bien cette cible de centre O.

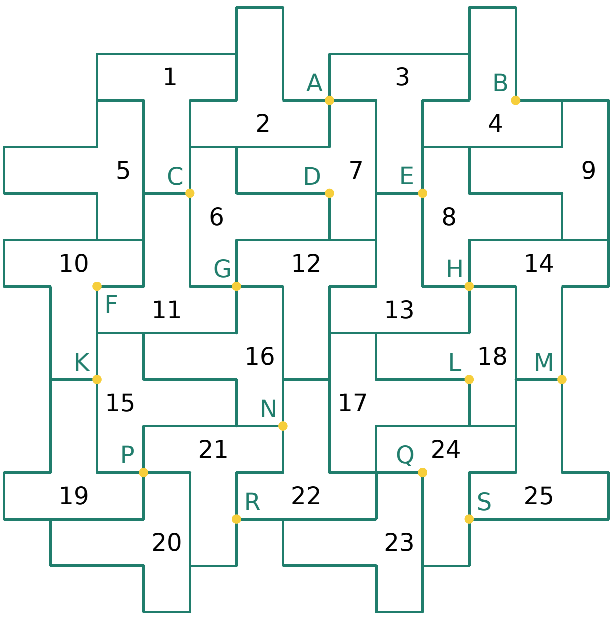
a. Quelles sont les images respectives des pièces 2, 10 et 18, par la rotation de centre O et d'angle 60° ?

b. Même question pour les pièces 6, 9 et 13, par la rotation de centre O et d'angle 120°.



c. Par quelle transformation la pièce 13 est-elle l'image de la pièce 14 ? Donne plusieurs réponses.

21 Observe le pavage ci-dessous.



a. Recopie puis complète le tableau en observant le pavage.

La pièce n°		10	24	21	21	15
est l'image de la pièce n°	6		4	15	20	12
par la rotation de centre	G	R				
et d'angle	90°	90°	180°			

b. Par quelle transformation la pièce n°3 a pour image la pièce n°25 ?

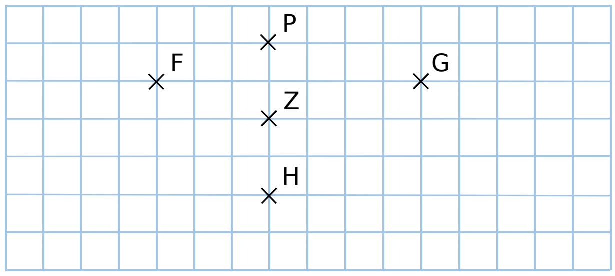
c. Par quelle transformation la pièce n°13 a pour image la pièce n°25 ?

d. Par quelle transformation la pièce n°14 a pour image la pièce n°25 ?

e. Par quelle transformation la pièce n°22 a pour image la pièce n°25 ?

Constructions

22 Reproduis la figure ci-dessous.



a. Construis le point A, image de F par la translation qui transforme G en Z.

b. Construis le point B, image de G par la translation qui transforme Z en H.

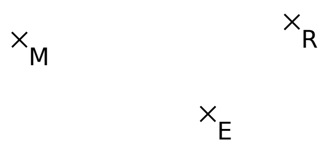
c. Construis le point C, image de H par la translation qui transforme P en Z.

23 ***Translation et coordonnées***

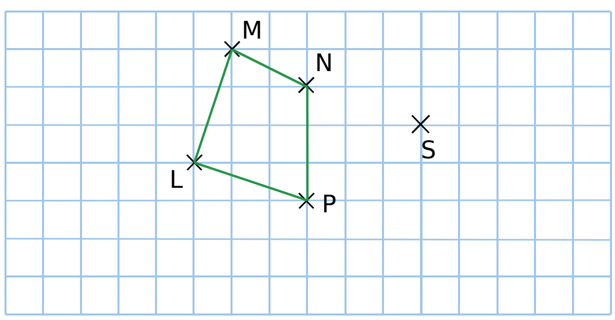
a. Dans un repère, place les points A(– 1 ; 2) ; B(2 ; 5) et C(1 ; 1).

b. Donne les coordonnées des points A' et C', images respectives des points A et C par la translation qui transforme B en C.

24 Reproduis la figure ci-dessous sur papier blanc et construis, avec les instruments, les points E' et R', images respectives de E et R par la translation qui transforme M en R.



25 Reproduis le quadrilatère suivant.



a. Construis l'image $L_1M_1N_1P_1$ de ce quadrilatère par la translation qui transforme M en S.

b. Construis l'image $L_2M_2N_2P_2$ de ce quadrilatère par la translation qui transforme S en P.

26 **TICE Géométrie Dynamique**

a. Affiche le repère.

b. Place le point O de coordonnées (0 ; 0) et le point A(3 ; 4).

c. Place quatre points B, C, D et E de telle sorte que leurs coordonnées soient des nombres entiers relatifs.

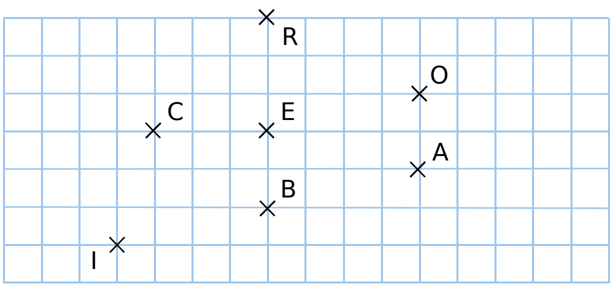
d. Construis les images B', C', D' et E' de B, C, D et E par la translation qui transforme O en A.

e. Que remarques-tu ?

f. Cette remarque est-elle encore valable lorsque le point A a pour coordonnées (1 ; 2) ?

27 Trace un segment [BK] de milieu E. Construis F, l'image de E par la translation qui transforme B en K, puis G l'image de B par la translation qui transforme K en B.

28 Reproduis la figure ci-dessous.



a. Construis le point S, image de E par la rotation de centre B et d'angle 90°.

b. Construis le point T, image de O par la rotation de centre A et d'angle 270°.

c. Construis le point U, image de I par la rotation de centre E qui transforme R en C.

29 **TICE Géométrie Dynamique**

a. Affiche le repère.

b. Place le point O de coordonnées (0 ; 0).

c. Place les points A(0 ; 7) ; B(5 ; 0) ; C(3 ; 5) et D(3 ; − 2).

d. Construis, à l'aide du logiciel, A', B', C' et D' les images de A, B, C et D par la rotation de centre O et d'angle 90°.

e. Quelle remarque peux-tu faire sur les coordonnées de tous ces points ?

30 Reproduis le quadrilatère de l'exercice **25** et construis son image par la rotation de centre S et d'angle 90°.

31 ***Avec les instruments de géométrie***

a. Construis un cercle de centre O et de rayon 4 cm, puis place un point B sur ce cercle.

b. Construis C, l'image de B par la rotation de centre O et d'angle 55°.

c. Construis D, l'image de B par la rotation de centre O et d'angle 125°.

d. Construis E, l'image de B par la rotation de centre O et d'angle 270°.

32 **TICE Géométrie Dynamique**

a. Place deux points O et A quelconques.

b. Construis B, l'image de A par la rotation de centre O et d'angle 60°, puis C, l'image de B par cette même rotation... et ainsi de suite jusqu'à retomber sur le point A. Relie les points que tu as construits. Quelle figure obtiens-tu ?

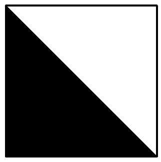
c. Même exercice, mais avec une rotation de centre O et d'angle 40°.

d. Même exercice, mais avec une rotation de centre O et d'angle 36°.

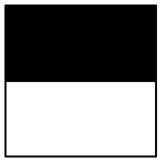
e. Que remarques-tu ?

33 Dans chaque cas ci-dessous, construis une frise en commençant par le motif de base proposé. Le motif suivant sera obtenu en faisant tourner d'un quart de tour le motif précédent.

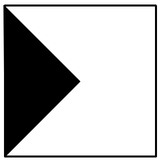
a.



b.



c.



34 Soit [AB] un segment de longueur 7 cm.

a. Construis le cercle (C) de centre B et de rayon 3 cm.

b. Construis en rouge l'image du cercle (C) par la translation qui transforme B en A.

c. Construis en bleu l'image du cercle (C) par la rotation de centre A et d'angle 77°.

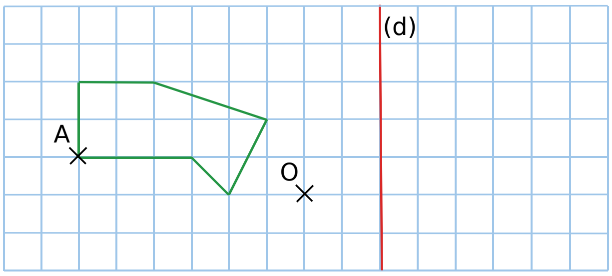
d. Quelle est l'image du cercle (C) par la rotation de centre B et d'angle 23° ? Justifie.

35 Construis un rectangle ABCD de centre O, tel que AB = 5 cm et AD = 3 cm.

a. Construis l'image de ce rectangle par la translation qui transforme O en C.

b. Construis l'image de ce rectangle par la rotation de centre O et d'angle 45°.

36 Reproduis cette figure.



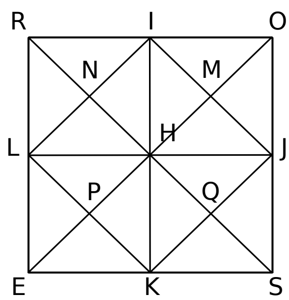
a. Construis en rouge l'image du polygone vert par la translation qui transforme O en A.

b. Construis en bleu l'image du polygone vert par la symétrie centrale de centre O.

c. Construis en orange l'image du polygone vert par la rotation de centre A et d'angle 90°.

d. Construis en gris l'image du polygone vert par la symétrie d'axe (d).

37 Sur cette figure, ROSE est un carré de centre H. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [RO], [OS], [SE] et [RE].



a. Reproduis la figure en prenant RO = 8 cm.

b. Colorie en jaune le triangle RNI.

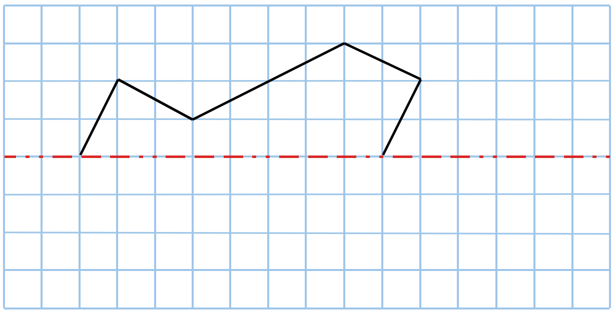
c. Colorie en bleu le symétrique du triangle RNI par rapport à N, puis en vert le symétrique du triangle RNI par rapport à H.

d. Colorie en rouge l'image de RNI par la rotation de centre H et d'angle 270°.

e. Colorie en marron l'image du triangle RNI par la translation qui transforme L en K.

f. Que dire de l'image du triangle RNI par la rotation de centre H et d'angle 360° ?

38 Reproduis le dessin ci-dessous.



a. Construis le symétrique de la ligne brisée par rapport à l'axe rouge. On obtient un polygone.

b. À l'aide de rotations d'angle 90° et de translations, pave le plan avec ce polygone.

Propriétés

39 QCM

a. Si P est l'image de A par la translation qui transforme E en C, alors...

R.1	R.2	R.3
PC = AE	AC = PE	PA = AE

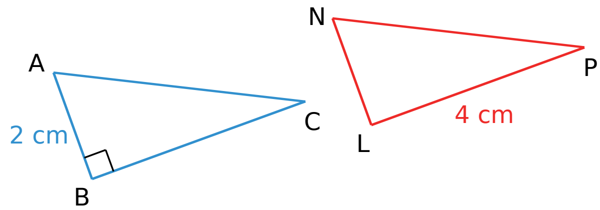
b. Si B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle 30°, alors...

R.1	R.2	R.3
OA = AB	OB = AB	OA = OB

c. Soit P le milieu de [AB]. Si AB = 3 cm et si A', B' et P' sont les images respectives de A, B et P par une rotation de centre O et d'angle 5°, alors...

R.1	R.2	R.3
A'P' = 5 cm	A'P' = 1,5 cm	A'P' = 6 cm

40 Le triangle NLP est l'image du triangle ABC par la translation qui transforme A en N.



Quelle est l'aire du triangle rouge ? Justifie.

41 Soit A le milieu d'un segment [BC]. D est l'image de A par la translation qui transforme B en C. E est l'image de A par la translation qui transforme C en B.

a. Construis une figure avec BC = 6 cm.

b. Démontre que A est le milieu de [ED].

42 Voici les images des points d'une figure par une translation.

Point	S	M	P	A	G	C
Image	R	E	V	B	Z	D

a. Donne deux segments qui ont le même milieu.

b. On sait que $\widehat{SMP} = 35°$. Peux-tu en déduire la mesure d'un autre angle ? Justifie.

c. Le triangle EBD a pour aire 2,5 cm². Peux-tu en déduire l'aire d'un autre triangle ? Justifie.

d. On sait que AC = 3 cm. Par quel point passe le cercle de centre B et de rayon 3 cm ? Justifie.

43 Soit [AB] un segment mesurant 9 cm et (C) un cercle de centre A. (C') est l'image du cercle (C) par la translation qui transforme A en B.

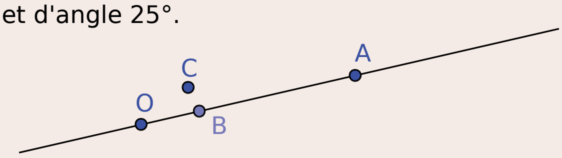
a. Construis une figure dans le cas où le cercle (C) a pour rayon 4 cm.

b. Pour quelle(s) valeur(s) de ce rayon les cercles (C) et (C') ont-ils un point d'intersection ? Deux points d'intersection ?

44 TICE Géométrie Dynamique

a. Construis deux points distincts, O et A, puis la droite (OA).

b. Place un point B sur (OA), puis construis le point C, image de B par la rotation de centre O et d'angle 25°.

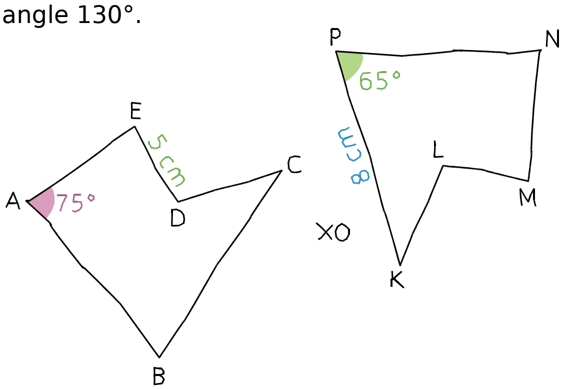


c. Active la trace de C et déplace le point B.

d. Quelle est l'image de la droite (OA) par cette rotation ?

e. Que peux-tu conjecturer sur la mesure de l'angle formé par une droite et son image par une rotation ? Teste sur d'autres exemples.

45 On a construit, à main levée, l'image du polygone PNMLK par la rotation de centre O et d'angle 130°.



a. Quelles sont les images de P, M, L et K ?

b. Donne la longueur du segment [CB]. Justifie.

c. Donne la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. Justifie.

d. Quelles autres angles ou longueurs peux-tu donner ? Justifie.

46 Voici les images des points d'une figure par une rotation d'angle 72°.

Point	E	T	R	S	A	C
Image	V	J	I	S	Z	D

a. Quel est le centre de cette rotation ? Pourquoi ?

b. On sait que ER = 1,8 cm et ZD = 4,1 cm. Donne les longueurs AC et VI. Justifie.

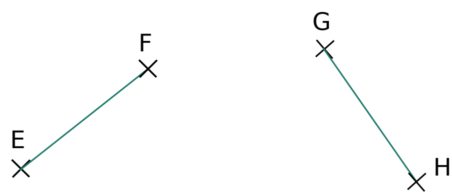
c. RAC est un triangle équilatéral de 3 cm de côté. Quel autre triangle équilatéral est-on certain d'avoir sur la figure ? Justifie.

d. On sait que VJ = JZ. Quelle est la nature du triangle ETA ? Pourquoi ?

47 ***Centre d'une rotation***

a. Construis un segment [AB] de longueur 5 cm. Sachant que A est l'image de B par une rotation, où se trouve nécessairement le centre de cette rotation ? Place plusieurs centres possibles.

b. Ci-dessous, [EF] et [GH] sont deux segments de même longueur.



On suppose que E et F sont les images respectives de G et H par une rotation. Comment trouver le centre de cette rotation ?

48 ***Du triangle au carré***

a. Construis un triangle ABC rectangle en C, tel que AC = 2 cm et CB = 4 cm.

b. Construis l'image D de B par la rotation de centre C et d'angle 90°.

c. Construis E le symétrique de B par rapport à C.

d. Construis F l'image de C par la translation qui transforme B en C.

e. Démontre que BDFE est un carré.

49 TICE Géométrie Dynamique

a. Trace un cercle de centre A et de rayon 3. Place un point B sur ce cercle, puis trace [AB].

b. Crée un curseur angle α, variant de 0 à 360 avec un incrément de 1°.

c. Construis B', image de B par la rotation de centre A et d'angle α.

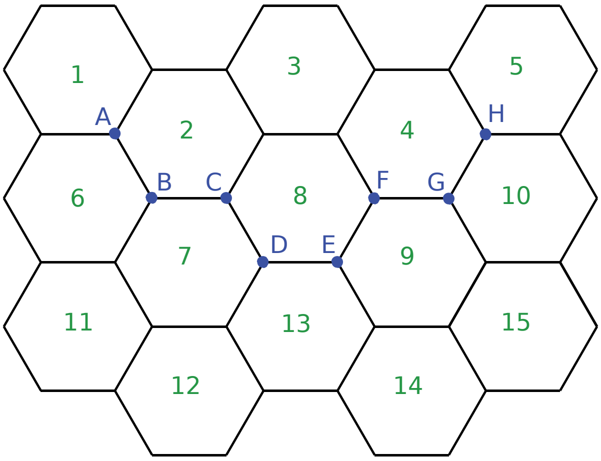
d. Trace le cercle de centre A et de rayon 2. Trace le segment [AB']. Il coupe le cercle en C.

e. Trace le cercle de centre C et de rayon 1.

f. Construis B'', image de B' par la rotation de centre C et d'angle 3α.

g. Affiche la trace de B'' et anime α.

50 Voici un pavage dont le motif de base est un hexagone régulier.



a. Quelle est l'image de la pièce 8 par la rotation de centre B et d'angle 120° ?

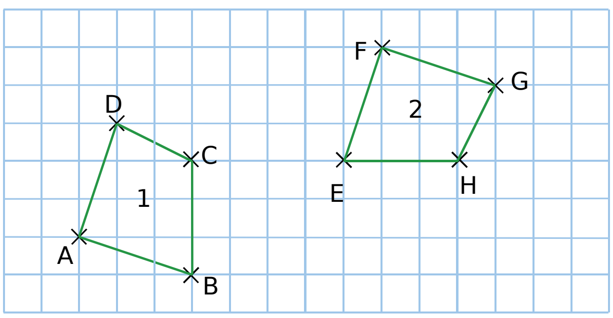
b. Quelle est l'image de la pièce 8 par la translation qui transforme E en A ?

c. Quelle est l'image de la pièce 15 par la translation qui transforme C en A ?

d. On considère l'image de la pièce 5 par la translation qui transforme F en D. Puis on applique à cette image la rotation de centre F et d'angle 120°. Sur quelle pièce arrive-t-on au final ?

e. On considère l'image de la pièce 1 par la rotation de centre B et d'angle 120°. Puis on applique à cette image la translation qui transforme B en F. Sur quelle pièce arrive-t-on au final ?

51 ***Transformation !***



a. La figure 2 est-elle l'image de la figure 1 par une translation ? Justifie.

b. La figure 2 est-elle l'image de la figure 1 par une symétrie centrale ?

c. Peut-on passer de la figure 1 à la figure 2 en enchainant plusieurs transformations géométriques ? Si oui, propose un exemple et fais une figure.

52 **TICE Géométrie Dynamique**

a. Trace une droite (OA).

b. Construis le cercle de centre O passant par A. Place un point M sur ce cercle et construis la droite (OM).

c. Construis le symétrique M_1 de A par rapport à (OM), puis trace la droite (OM_1).

d. Construis le symétrique M_2 de M par rapport à (OM_1).

e. Construis la perpendiculaire à (OA) passant par M_2. Elle coupe (OA) en H.

f. Construis la perpendiculaire (d) à (OA) en O.

g. La perpendiculaire à (d) en M_2 coupe (d) en F.

h. Le cercle de centre O passant par F coupe la droite (OM_2) en G (G et M_2 sont de part et d'autre du point O).

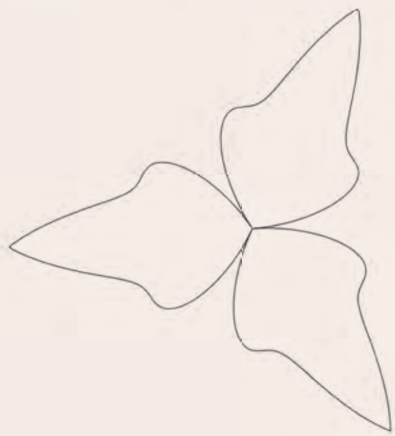
i. La perpendiculaire à (OA) passant par G coupe (OA) en K.

j. Construis A', l'image de A par la translation qui transforme O en H.

k. Construis A'' l'image de A' par la translation qui transforme O en K.

l. Le cercle de centre O passant par A'' coupe la droite (OM) en M'.

m. Construis le lieu de M' lorsque M varie sur le cercle.



53 **Vrai ou Faux**

P.1. Si A est l'image de D par la translation qui transforme E en G, alors G est l'image de E par la translation qui transforme D en A.

P.2. Une rotation de centre O et d'angle 450° équivaut à un quart de tour de centre O.

P.3. Soient A et B deux points distincts. Il existe un point qui est sa propre image par la translation qui transforme A en B.

Composons !

TICE Géométrie Dynamique

Effectue chaque construction ci-dessous à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Partie 1

Place deux points O et O', puis construis un triangle ABC.

a. Construis le symétrique A'B'C' du triangle ABC par rapport au point O, puis le symétrique A"B"C" du triangle A'B'C' par rapport au point O'.

b. Comment peut-on construire directement le triangle A"B"C" à partir du triangle ABC ?

c. Dans quel cas les triangles ABC et A"B"C" sont-ils confondus ?

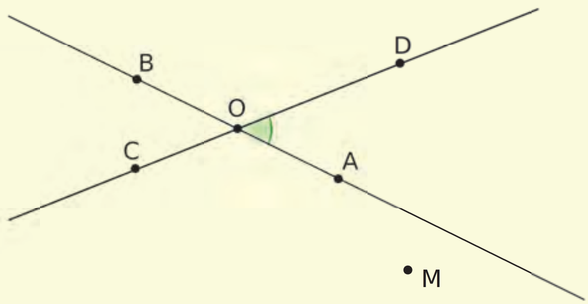
Partie 2

On considère deux droites (AB) et (CD).

<u>1er cas</u> : (AB) et (CD) sont sécantes en O.

d. Marque l'angle $\widehat{AOD}$. Place un point M quelconque. Construis le symétrique M' du point M par rapport à la droite (AB), puis le symétrique M" du point M' par rapport à la droite (CD).

e. Construis les segments [OM], [OM'] et [OM"]. Comment peut-on obtenir directement le point M" à partir du point M ?



<u>2e cas</u> : (AB) et (CD) sont parallèles.

f. Construis le symétrique M' du point M par rapport à la droite (AB), puis le symétrique M" du point M' par rapport à la droite (CD).

g. Comment peut-on obtenir directement le point M" à partir du point M ?

Partie 3

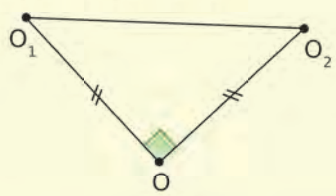
h. Construis trois points A, B et C, et un triangle DEF.

i. Construis l'image D'E'F' du triangle DEF par la translation qui transforme A en B. Construis l'image D"E"F" du triangle D'E'F' par la translation qui transforme B en C.

j. Déplace les points de la figure. Dans quel cas les triangles DEF et D"E"F" sont-ils confondus ? Comment peut-on obtenir le triangle D"E"F" directement à partir du triangle DEF ?

k. Reprends les questions **h**, **i** et **j** mais avec deux rotations de même centre O. Pour définir les angles, construis deux curseurs a et b, variant de 0° à 180°.

l. Construis un triangle OO_1O_2 rectangle isocèle en O.



m. Soit M un point quelconque. Construis l'image M' du point M par la rotation de centre O_1 et d'angle 90°, puis l'image M" du point M' par la rotation de centre O_2 et d'angle 90°.

n. Comment peut-on construire directement le point M" à partir du point M ? Est-ce possible à l'aide d'une rotation ? Justifie.

G4

Espace

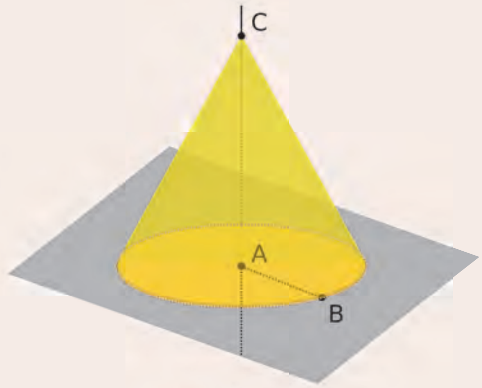
1 Section de cône

Cours : 3

TICE Géométrie Dynamique

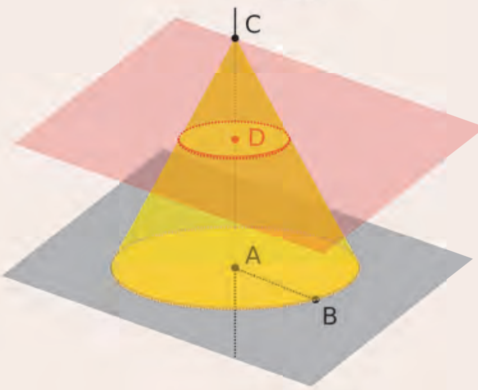
a L'objectif de cette question est de construire un cône de sommet C et de base un disque de centre A passant par un point B.

- Dans la fenêtre *Graphique*, construis un cercle de centre A passant par un point B. Trace [AB].
- Dans la fenêtre *Graphique 3D*, construis ensuite la droite perpendiculaire (bouton *Orthogonale*) au plan xOy passant par le point A.
- Place un point C sur cette perpendiculaire.
- À l'aide du bouton *Cône*, construis enfin le cône demandé. Renomme-le $\mathscr{C}_1$.



b Place un point D sur la droite (AC) et construis le plan perpendiculaire à cette droite passant par le point D. Trace les segments [CA] et [CD].

Construis l'*Intersection de deux surfaces* entre ce plan et le cône : on obtient ainsi la section du cône par ce plan.



c Demande au logiciel de *Créer une vue 2D* de cette section. Déplace les points de la figure. Pense également à changer l'orientation de la vue.

Que peux-tu dire de la section d'un cône par un plan parallèle à la base ?

d Masque le plan de coupe. Place un point E sur cette section et trace le segment [DE].

Construis le cône $\mathscr{C}_2$ de sommet C et de base cette section.

Déplace le point D de sorte qu'il soit au milieu du segment [CA].

Que dire...

- de la hauteur de $\mathscr{C}_2$ par rapport à celle de $\mathscr{C}_1$?
- du rayon de base de $\mathscr{C}_2$ par rapport à celui de $\mathscr{C}_1$?
- du volume de $\mathscr{C}_2$ par rapport à celui de $\mathscr{C}_1$?

Que remarques-tu ?

2 Volume de la pyramide

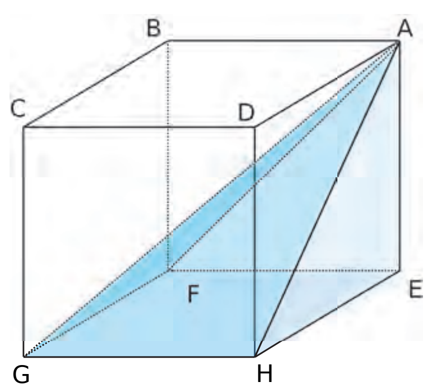
Cours : 4

a Sur une feuille de papier A4, réalise un patron de la pyramide AEFGH, représentée ci-contre en perspective cavalière, sachant que ABCDEFGH est un cube d'arête 8 cm.

b Vérifie qu'en assemblant trois pyramides, on obtient un cube d'arête 8 cm.

Quel est alors le volume de chaque pyramide ?

c Quelle relation peux-tu écrire entre le volume d'une pyramide, l'aire de sa base et sa hauteur ?



1 Pyramide

15

A Vocabulaire

Définitions Une **pyramide** est un solide dans lequel :

- une des faces, appelée **base** de la pyramide, est un polygone ;
- les autres faces, appelées **faces latérales**, sont des triangles qui ont un sommet commun, appelé **sommet** de la pyramide.

La **hauteur** d'une pyramide est le segment issu de son sommet et perpendiculaire à la base.

Une **arête latérale** est un segment joignant un des sommets de la base au sommet de la pyramide.

Exemple :

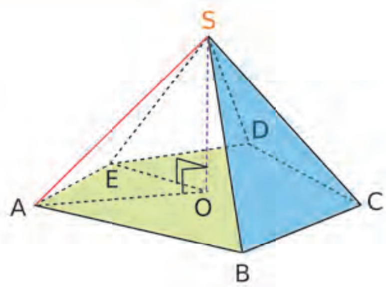
Le **sommet** de cette pyramide est le point S.

La **base** de cette pyramide est le pentagone ABCDE.

Les **faces latérales** sont les triangles : SAB, SBC, SCD, SDE, SEA.

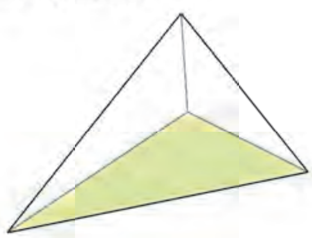
Les **arêtes latérales** sont les segments : [AS], [BS], [CS], [DS], [ES].

La **hauteur** de la pyramide est le segment [OS].

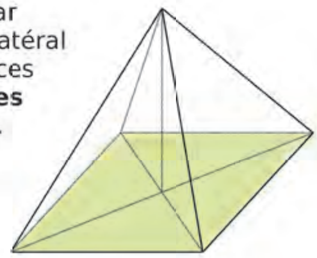


Remarques :

- Une pyramide à base triangulaire s'appelle un **tétraèdre**.



- Une **pyramide régulière** est une pyramide dont la base est un **polygone régulier** (par exemple, un triangle équilatéral ou un carré) et dont les faces latérales sont des **triangles isocèles superposables**. Sa **hauteur** passe par le centre de la base qui est le point de concours des diagonales.

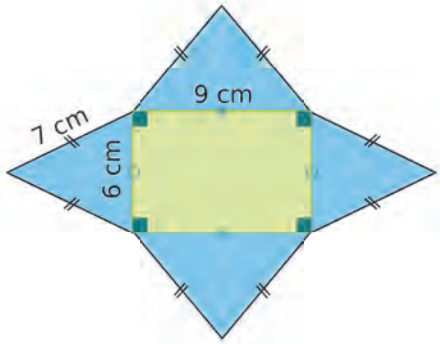


B Patron

Exemple :

Voici le **patron** d'une pyramide.

Sa **base** est un rectangle, de longueur 9 cm et de largeur 6 cm, et chaque arête latérale mesure 7 cm.



2 Cône de révolution

→ 15

A Vocabulaire

Définitions

- Un **cône de révolution** est un solide qui est généré par un triangle rectangle en rotation autour d'un des côtés de son angle droit.
- La **base** d'un cône de révolution est un disque.
- La **hauteur** d'un cône de révolution est le segment qui joint le centre de ce disque au sommet du cône. Il est perpendiculaire au disque de base.
- Une **génératrice** d'un cône de révolution est un segment qui joint le sommet du cône à un point du cercle de base.

Exemple :

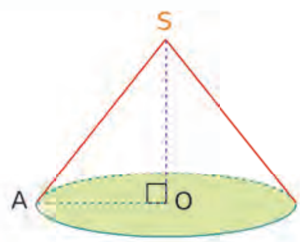
Le **sommet** du cône est le point S.

La **base** de ce cône est le disque de centre O : on la représente en perspective par un ovale (une ellipse) car elle n'est pas vue de face.

La **hauteur** du cône est le segment [OS].

Le triangle AOS, rectangle en O, génère le cône en tournant autour de (OS).

Une **génératrice** du cône est [SA].



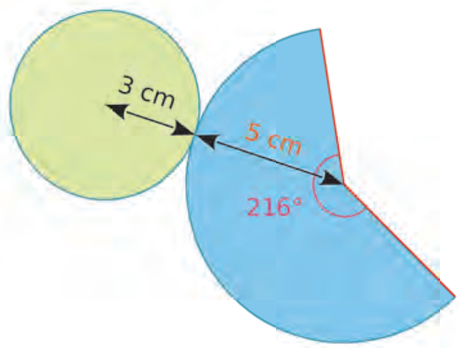
B Patron

Exemple :

Voici le **patron** d'un cône de rayon de base 3 cm et de génératrice 5 cm.

La longueur du secteur de disque de rayon 5 cm est égale au périmètre de la base, soit : 6π cm.

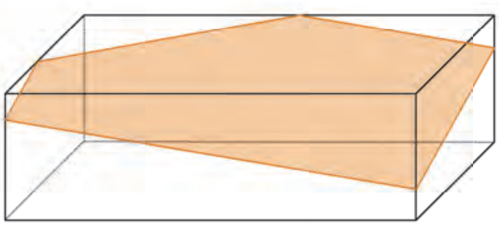
L'angle du secteur de disque est proportionnel à sa longueur. Il a pour angle $\dfrac{360 \times 6\pi}{10\pi} = 36 \times 6 = 216°$.



3 Sections

→ 21

Définition La section d'un solide par un plan est l'intersection entre ce solide et le plan.



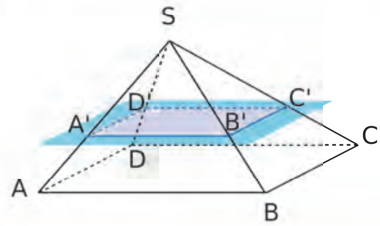
Propriété 1 La section d'une pyramide par un **plan parallèle à la base** est un polygone de même nature que la base.

Exemple :

On coupe une pyramide SABCD à base carrée par un plan parallèle à sa base.

La section A'B'C'D' est un carré.

C'est une réduction du carré ABCD.



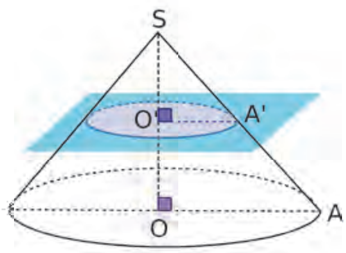
Propriété 2 La section d'un cône de révolution par un **plan parallèle à la base** est un disque de rayon inférieur à celui de la base.

Exemple :

On coupe un cône de révolution par un plan parallèle à sa base.

La section est un disque de centre O'.

C'est une réduction du disque de base.



4 Volume

27

Propriété Le volume d'une **pyramide** ou d'un **cône de révolution** est donné par la formule : $\mathcal{V} = \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$

Remarque :

Lorsque les longueurs sont exprimées en m, l'aire de la base est exprimée en m², et le volume de la pyramide en m³.

Exemple 1 :

On souhaite calculer le volume d'une pyramide de hauteur 2,50 m ayant pour base un rectangle de dimensions 4 m et 4,20 m.

$\mathcal{A} = L \times l = 4 \times 4{,}2 = 16{,}8 \text{ m}^2$ ⟶ On calcule l'aire de la base : c'est un losange.

$\mathcal{V} = \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$ ⟶ On écrit la formule du volume d'une pyramide.

$\mathcal{V} = \dfrac{16{,}8 \times 2{,}5}{3} = 14 \text{ m}^3$ ⟶ On remplace par les valeurs numériques.

Donc le volume de la pyramide est 14 m³.

Exemple 2 :

On souhaite calculer le volume d'un cône de révolution de hauteur 25 cm ayant pour base un disque de rayon 9 cm.

$\mathcal{A} = \pi \times r^2 = \pi \times 9^2 = 81\pi \text{ cm}^2$ ⟶ On calcule l'aire de la base : c'est un disque de rayon 9 cm.

$\mathcal{V} = \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$ ⟶ On écrit la formule du volume du cône.

$\mathcal{V} = \dfrac{81\pi \times 25}{3} = 27\pi \times 25 = 675\pi \text{ cm}^3$ ⟶ On remplace par les valeurs numériques et on termine le calcul.

Donc le volume exact du cône est 675π cm³.

Une valeur approchée au cm³ près est 2 120 cm³.

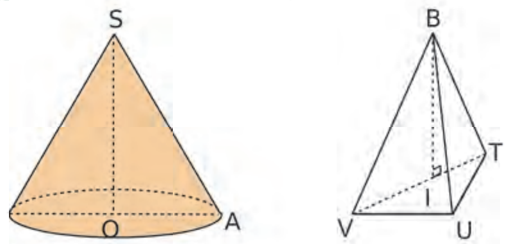
Exercices

À l'oral !

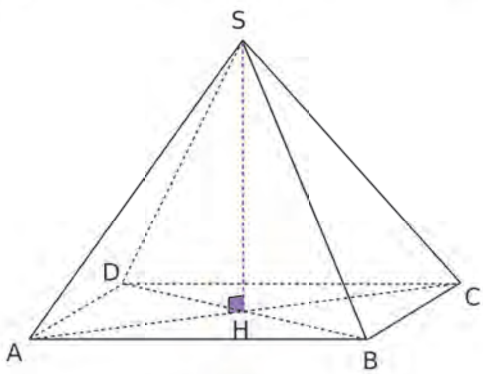
Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

1 On a représenté ci-dessous une pyramide et un cône de révolution. Dans chaque cas, donne la nature de la base et nomme une hauteur.

a. **b.**



2 La pyramide régulière ci-dessous a pour base un carré de côté 5 cm, et pour hauteur 6 cm.



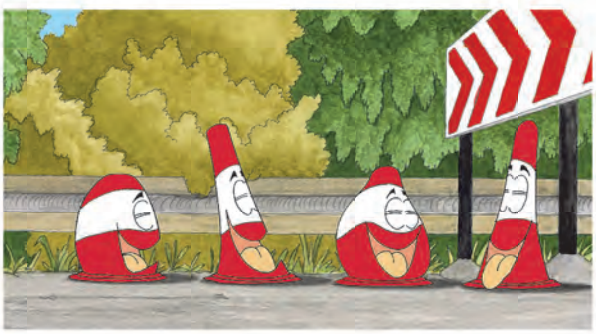
a. Donne les longueurs BC et SH.

b. Combien ce solide possède-t-il d'arêtes ? De faces ? De sommets ?

c. Indique toutes les égalités de longueurs.

d. Donne l'aire de la face ABCD.

e. Donne le volume de cette pyramide.

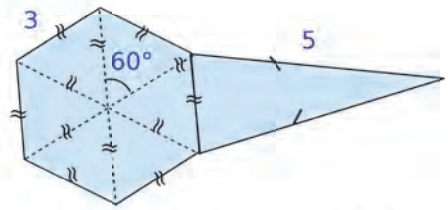


3 On considère à nouveau la pyramide de l'exercice précédent.

Quelle est la nature du triangle...

a. SHB ? **b.** SAC ? **c.** SBC ? **d.** HBC ?

4 ***Patron !***

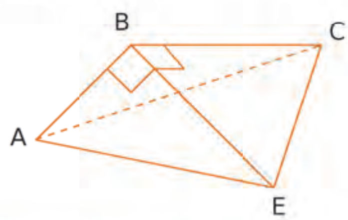


a. De quel solide a-t-on commencé le patron ci-dessus ? Décris-le.

b. Combien ce solide possède-t-il d'arêtes ? De faces ? De sommets ?

c. Que faut-il construire pour terminer ce patron ?

5 Voici une pyramide à base triangulaire. [AB], [BE] et [BC] ont des longueurs entières en centimètres. Donne toutes les possibilités pour AB, BE et BC afin que le volume de cette pyramide soit de 12 cm^3.



6 **Vrai ou Faux**

P.1. Une pyramide a toujours un nombre pair de sommets.

P.2. Une pyramide dont la base a 17 côtés a 18 sommets.

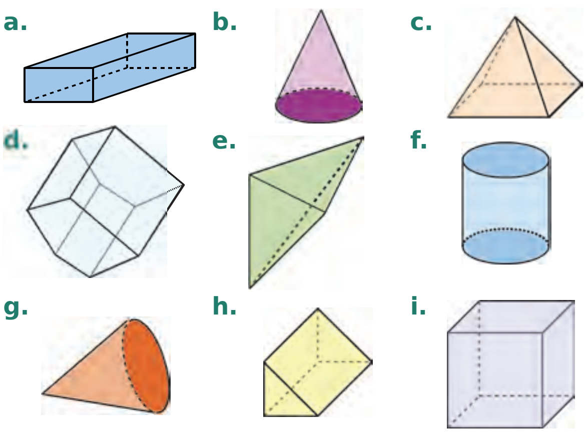
P.3. Le patron d'un cône de révolution est constitué de 2 disques pleins.

P.4. Les sections d'un cône par un plan parallèle à sa base sont des cercles.

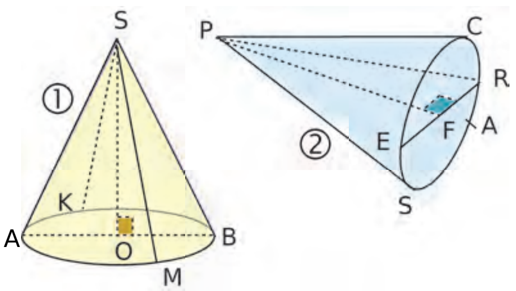
P.5. Si un cône et une pyramide ont une même hauteur et une base de même aire, alors ils ont le même volume.

Vocabulaire

7 Nomme chaque solide ci-dessous.



8 ***Cônes de révolution en vrac !***



a. Pour chaque cône de révolution, nomme son sommet, le centre et le diamètre de sa base, et sa hauteur.

b. Quelle est la nature de SKO et KSM dans le cône ① ? Et celle de PAF dans le cône ② ?

9 **QCM**

a. Si une pyramide a 7 faces en tout, alors sa base est...

R.1	R.2	R.3
un hexagone	un pentagone	un octogone

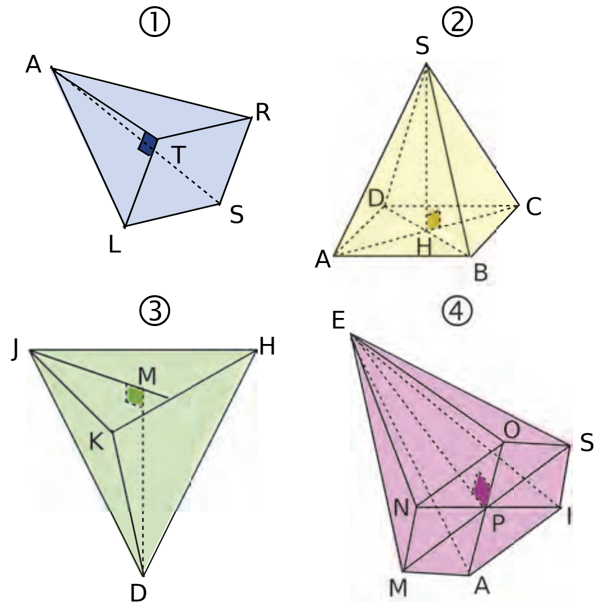
b. Le segment qui joint le centre de la base d'un cône de révolution à son sommet a pour longueur...

R.1	R.2	R.3
le rayon de la base	la hauteur du cône	le diamètre de la base

c. Une pyramide à base triangulaire possède...

R.1	R.2	R.3
6 arêtes	6 faces	6 sommets

10 ***Pyramides en vrac !***



Recopie et complète le tableau ci-dessous.

	①	②	③	④
Sommet				
Nature de la base				
Nom de la base				
Hauteur				
Nombre d'arêtes				
Nombre de faces				

11 **TICE Tableur**

a. Donne le nombre de faces, de sommets et d'arêtes d'une pyramide dont la base est un hexagone.

b. Dans un tableur, reproduis la feuille de calcul suivante.

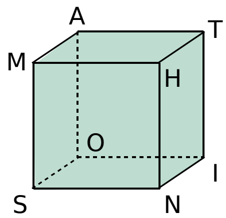
	A	B
1	Nombre de côtés d'une base	6
2	Nombre de faces	
3	Nombre d'arêtes	
4	Nombre de sommets	

c. Programme les cellules B2, B3 et B4 pour déterminer le nombre de faces, d'arêtes et de sommets de la pyramide, connaissant le nombre de côtés d'une base.

d. Utilise ta feuille de calcul pour vérifier tes réponses à l'exercice précédent.

Représentations de solides

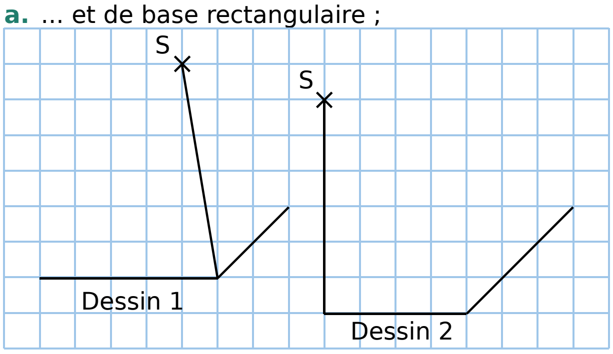
12 MATHSOIN est un cube de côté 6 cm. Pour chaque solide, donne sa nature puis construis-en une représentation en perspective cavalière.



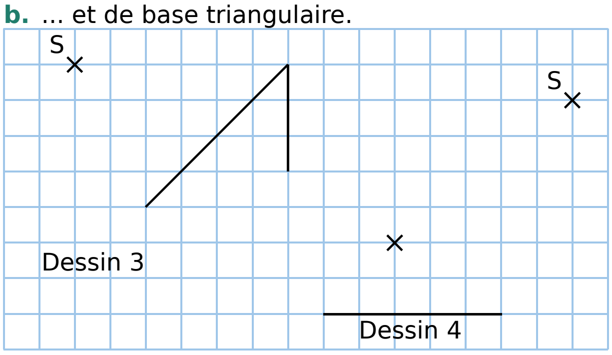
a. NMHT
b. SOMNIH
c. ATOS
d. ASNIO

13 Dans chaque cas ci-dessous, reproduis puis complète le dessin pour obtenir une représentation en perspective cavalière d'une pyramide de sommet S...

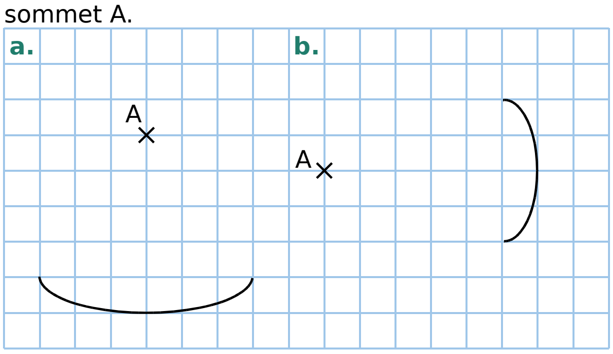
a. ... et de base rectangulaire ;



b. ... et de base triangulaire.

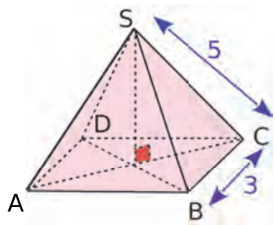


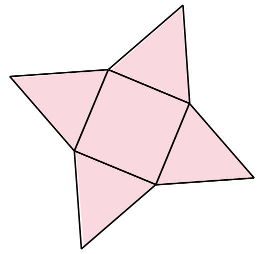
14 Recopie puis complète chaque dessin ci-dessous pour obtenir une représentation en perspective cavalière d'un cône de révolution de sommet A.



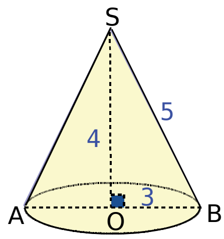
15 On a dessiné un solide en perspective cavalière, puis son patron. Reproduis le patron à main levée ; tu y indiqueras les points et les longueurs que tu connais. Code les segments de même longueur.

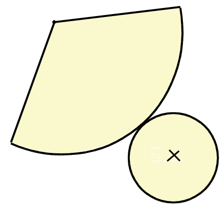
a. ABCD est un carré.



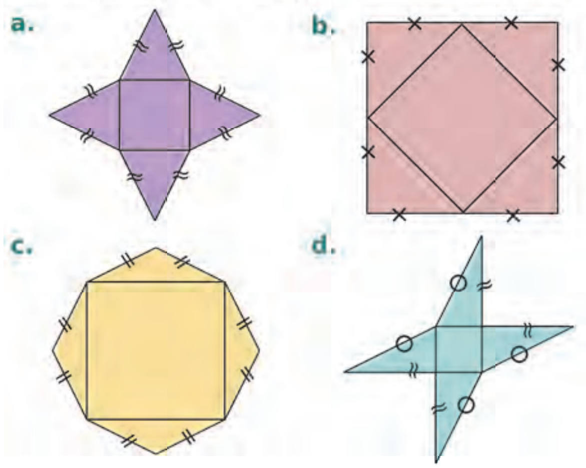


b.





16 Parmi les quatre figures ci-dessous, quels sont les patrons d'une pyramide à base carrée ?

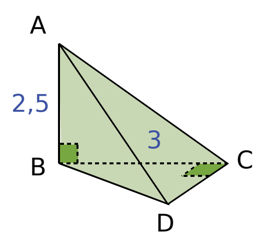


17 Un tétraèdre régulier est une pyramide dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux.

Trace le patron d'un tétraèdre régulier d'arête 5,5 cm.

18 ABCD est une pyramide dont la base est un triangle rectangle, isocèle en C, tel que AB = 2,5 cm et BC = 3 cm.

Construis un patron de cette pyramide.



Sections de solides

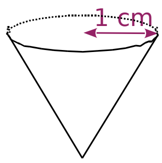
19 Un cône de révolution a une hauteur de 8 cm et une base de rayon 5 cm.

a. Construis, en vraie grandeur, la section de ce cône par un plan contenant l'axe du cône.

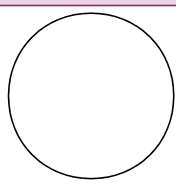
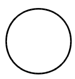
b. Calcule la longueur d'une génératrice du cône.

c. Calcule l'angle formé par une génératrice avec l'axe du cône.

20 QCM

a. 

Si on coupe ce cône par un plan parallèle à sa base, la section en vraie grandeur peut être...

R.1	R.2	R.3
		

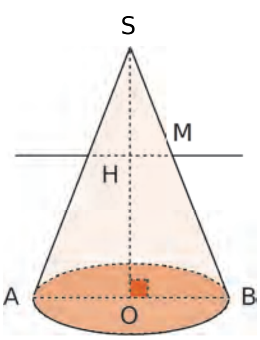
b. La section d'une pyramide à base carrée, de côté 4 cm, par un plan parallèle à sa base peut être...

R.1	R.2	R.3
un carré de côté 6 cm	un cercle de rayon 3 cm	un carré de côté 3 cm

21 On considère le cône de révolution ci-contre tel que OB = 6 cm, SB = 10 cm.

a. Calcule la hauteur SO du cône.

b. Calcule l'angle $\widehat{OSB}$.



c. Soit M un point de la génératrice [SB] tel que SM = 4 cm. On trace une droite parallèle à (OB) passant par M, elle coupe [SO] en H. Montre que les droites (SO) et (HM) sont perpendiculaires.

d. Calcule HM et SH.

e. Que peux-tu dire de la section du cône par le plan parallèle à sa base passant par M ?

22 TICE Géométrie Dynamique

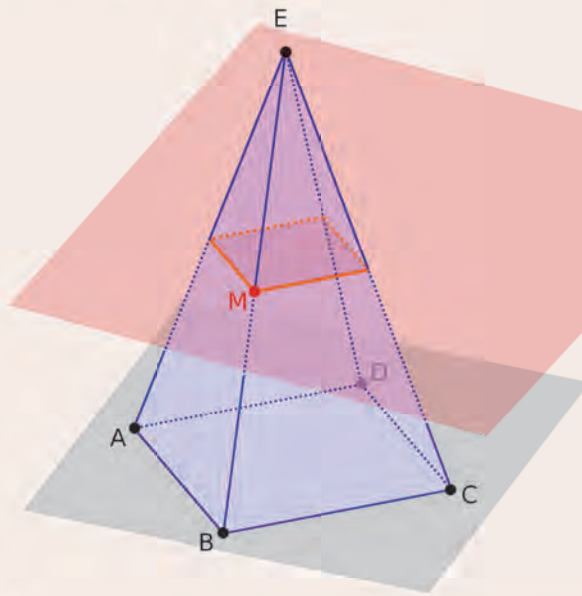
a. Dans la fenêtre *Graphique*, construis deux points A et B, puis le carré ABCD en utilisant le bouton *Polygone régulier* à quatre côtés.

Crée un curseur h entre 0 et 5, puis construis la pyramide EABCD de base ABCD et de hauteur h, à l'aide du bouton *Extrusion Pyramide/Cône*.

Construis un point M sur l'arête [EB], puis le plan parallèle à la base ABCD, passant par le point M.

Demande l'intersection de ce plan et de la pyramide à l'aide du bouton *Intersection de deux surfaces* : tu obtiens la section de la pyramide par ce plan.

Quelle est la nature de cette section ?



b. À l'aide de la souris, place le point M approximativement au milieu de l'arête [EB].

Compare les aires de la base ABCD et de la section.

c. Construis la pyramide de sommet E, dont la base est la section obtenue précédemment.

Compare les volumes des deux pyramides obtenues, toujours dans le cas où M est le milieu de l'arête [EB].

d. Quand on passe de la pyramide EABCD à la seconde pyramide...

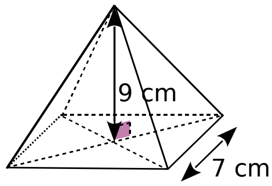
- par combien les longueurs sont-elles divisées ?
- par combien les aires des bases sont-elles divisées ?
- par combien les volumes sont-ils divisés ?

Quelles remarques t'inspirent ces résultats ?

Aires et volumes

23 **QCM**

a. Cette pyramide à base carrée a pour volume...



R.1	R.2	R.3
441 cm^3	147 cm^3	84 cm^3

b. Le volume d'un cône de révolution de rayon de base 4 cm et de hauteur 6 cm est...

R.1	R.2	R.3
32π cm^3	16π cm^3	96π cm^3

24 ***Volumes de pyramides***

a. Calcule le volume d'une pyramide SABCD, de hauteur 6,3 cm et de base rectangulaire ABCD, telle que : AB = 4,2 cm et BC = 3,5 cm. Donne le résultat en cm^3 puis en mm^3.

b. Calcule le volume d'une pyramide MATH, de base ATH rectangle isocèle en A et de hauteur [MA], telle que : AT = 3 cm et MA = 4 cm.

25 Calcule le volume d'un cône de révolution, de hauteur 15 cm et dont le rayon de la base est 8 cm. Donne la valeur arrondie au cm^3.

26 ***Pyramide de Khéops***

Pour construire la pyramide de Khéops, les Égyptiens ont utilisé environ 2 643 000 m^3 de pierres. La hauteur de la pyramide est de 146 m. Calcule le côté du carré constituant la base de la pyramide. Arrondis ton résultat au mètre.

27 Classe ces solides par ordre croissant de leur volume.

a. Un cube de 5 cm de côté.

b. Un cylindre de révolution de hauteur 4 cm et de rayon de base 5 cm.

c. Une pyramide dont la base est un rectangle de 4 cm par 5 cm et de hauteur 6 cm.

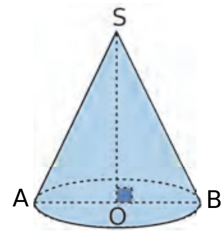
d. Un cône de révolution de hauteur 6 cm et de rayon de base 6 cm.

28 On considère un cône de révolution tel que SO = 5 cm et $\widehat{OSA} = 40°$.

a. Calcule la longueur de la génératrice [SA] du cône, arrondie au mm.

b. Calcule le rayon du disque de base, arrondi au mm.

c. Calcule le volume du cône, arrondi au cm^3.

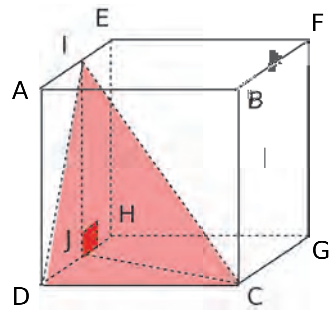


29 ABCDEFGH est un cube de côté 6 cm.

I et J sont les milieux respectifs de [AE] et de [DH].

a. Trace un patron de la pyramide IDJC.

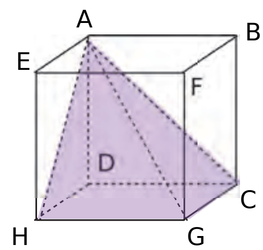
b. Calcule le volume de cette pyramide.



30 ACDHG est une pyramide inscrite dans un cube de côté 4 cm.

a. Calcule le volume de cette pyramide, arrondi au cm^3.

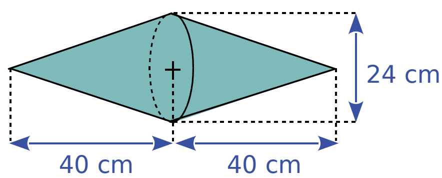
b. Calcule les longueurs AH, DG et AG, arrondies au millimètre.



c. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{AHD}$.

d. Construis un patron de cette pyramide.

31 La société Truc fabrique des enseignes publicitaires, composées de deux cônes de révolution de même diamètre, 24 cm, et de même hauteur, 40 cm.

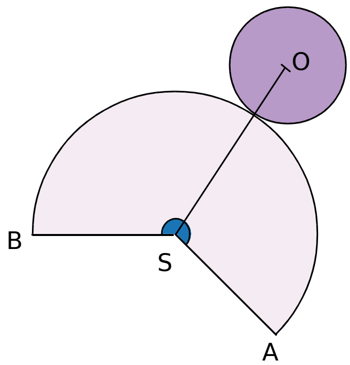


a. Calcule le volume d'une enseigne. Donnes-en la valeur exacte puis la valeur arrondie au dm^3.

b. Pour le transport, chaque enseigne est rangée dans un étui en carton ayant la forme d'un cylindre, le plus petit possible, et ayant la même base que les cônes.

Calcule le volume de cet étui en négligeant l'épaisseur du carton. Donnes-en la valeur exacte en cm^3 puis la valeur arrondie au dm^3.

32 On a représenté, à main levée, le patron d'un cône de révolution. Les génératrices mesurent 5 cm. Le disque de base, de centre O, a pour rayon R = 3 cm.



a. Nomme une génératrice de ce cône. Calcule la valeur exacte de la circonférence du grand cercle, ayant pour rayon la longueur de cette génératrice et pour centre le point S.

b. Détermine la valeur exacte de la circonférence du cercle de base.

c. Quelle est la valeur exacte de la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$? Justifie.

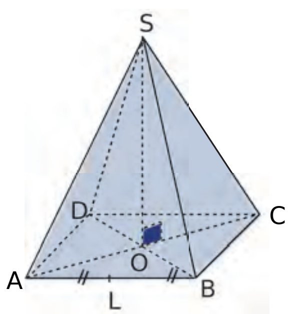
d. On admet qu'il y a proportionnalité entre la mesure de l'angle au centre $\alpha = \widehat{BSA}$ et la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ qui l'intercepte.
Calcule α en utilisant le tableau suivant.

	Longueur	Mesure de l'angle
Grand cercle		360°
Arc de cercle		α

e. À partir des résultats précédents, construis en vraie grandeur le patron de ce cône.

33 ***Aire latérale d'une pyramide***

SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD, telle que : AB = 14 dm et SA = 25 dm. Le point L est le milieu de [AB].

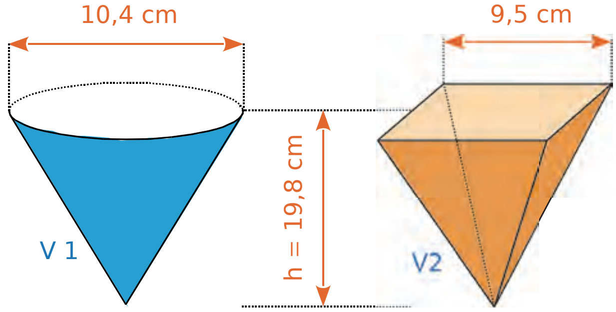


a. Calcule SL. Justifie.

b. Calcule l'aire du triangle SAB.

c. Déduis-en l'aire latérale de la pyramide, puis son aire totale.

34 On considère deux vases, l'un ayant la forme d'un cône de révolution, et l'autre celle d'une pyramide régulière à base carrée.



Le vase V_1 est rempli d'eau, jusqu'à ras bord. Si on transvase toute cette eau dans le vase vide V_2, le liquide débordera-t-il ?

35 Vrai ou Faux

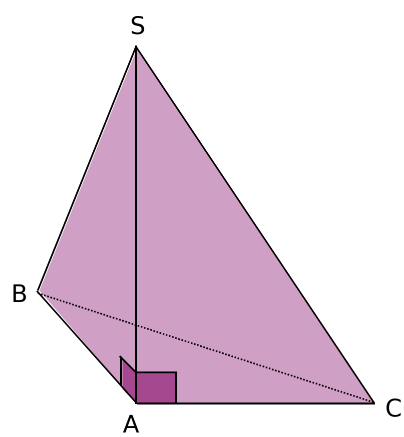
P.1. Une pyramide a toujours un nombre pair de faces.

P.2. Si je multiplie par deux le rayon de base d'un cône de révolution, son volume est multiplié par 4.

P.3. Si je multiplie la hauteur d'une pyramide par 2, son volume est multiplié par deux.

P.4. Le volume d'un cône est trois fois plus petit que le volume d'un cylindre ayant la même base et la même hauteur.

36 Soit la pyramide SABC de sommet S et de base ABC, représentée ci-après.
Les triangles SAB et SAC sont rectangles en A.
Les dimensions sont données en millimètres.
AS = 65 ; AB = 32 ; AC = 60 ; BC = 68.



a. Démontre que le triangle ABC est rectangle.

b. Calcule le volume de la pyramide SABC.

c. Trace un patron de cette pyramide.

Volumes

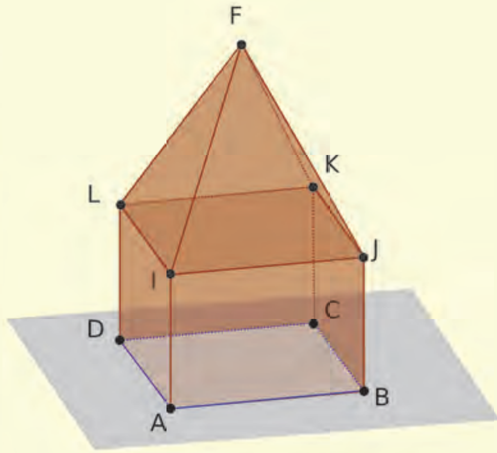
TICE Géométrie Dynamique

Partie 1

a. Dans la fenêtre *Graphique* d'un logiciel de géométrie dynamique, construis un segment [AB] de longueur 3, puis le carré ABCD. Fixe les points et crée un curseur h variant entre 0 et 8.

- En utilisant le bouton *Extrusion Prisme/Cylindre*, construis un prisme ABCDIJKL de base ABCD et de hauteur h.
- En utilisant le bouton *Extrusion Pyramide/Cône*, construis la pyramide IJKLF de base IJKL et de hauteur 3.

On considère alors l'assemblage du prisme et de la pyramide : ce solide est appelé S dans la suite de l'exercice.



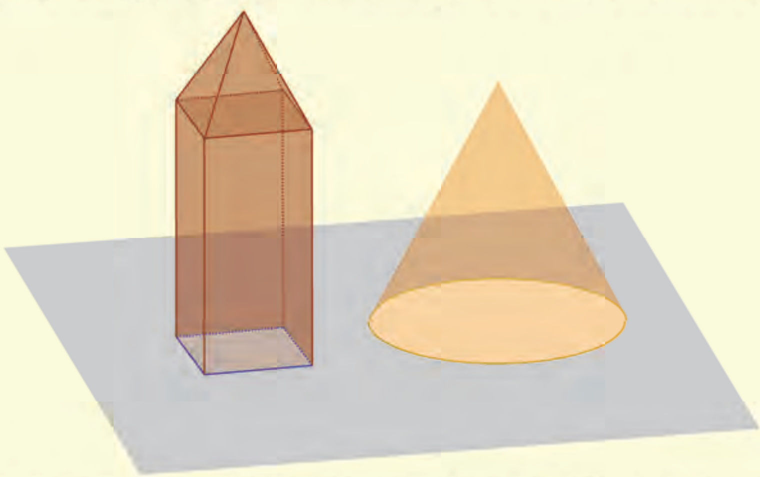
b. En déplaçant le curseur h et en observant les valeurs affichées par le logiciel, reproduis et complète le tableau suivant.

h	1	2	3	4
Volume de S				

Le volume du solide S est-il proportionnel à la hauteur h ?
Exprime le volume du solide S en fonction de la hauteur h et vérifie les résultats obtenus dans ton tableau.

Partie 2

c. Dans la fenêtre qui contient le carré ABCD, construis un cercle de centre O (place ce point à un endroit quelconque du plan) et de rayon 4. En utilisant le bouton *Extrusion Pyramide/Cône*, construis le cône dont la base est le disque de centre O et de rayon 4, et dont la hauteur est égale à h.



d. En déplaçant le curseur h et en observant les valeurs affichées par le logiciel, reproduis et complète le tableau suivant.

h	1	2	3	4
Volume du cône				

Le volume du cône semble t-il proportionnel à la hauteur h ?
Exprime le volume du cône en fonction de h. Justifie ta réponse.

e. Le solide S et le cône peuvent-ils avoir le même volume ? Si oui, pour quelle valeur de h ?

D1

Proportionnalité

Activités

1 Quatrième... proportionnelle

Cours : 1

René, cultivateur, répartit 720 kg d'engrais biologique sur une surface de 4 hectares.
Il lui reste encore 440 kg d'engrais. Il se demande quelle surface de terrain il peut encore couvrir.

a Recopie le tableau de proportionnalité suivant et complète les pointillés.

.....	720	...
.....	...	x ?

b Justifie l'égalité $720x = 1\ 760$.

c Conclus.

d Georges, ami cultivateur de René, souhaite traiter un terrain de 5,5 hectares avec ce même engrais. Quelle quantité d'engrais doit-il prévoir ?

2 Fille ou garçon ?

Cours : 2-A

a En 2014, sur les 781 167 nouveaux-nés, on compte 399 284 garçons et 381 883 filles. Quel est le pourcentage de garçons parmi les nouveaux-nés ? Et celui des filles ?

b Voici les statistiques pour les années 2010 à 2013.

Année	Nombre de naissances de garçons	Nombre de naissances de filles
2010	410 140	392 084
2011	405 206	387 790
2012	404 774	385 516
2013	400 149	381 472

Pour chacune de ces années, quel est le pourcentage de garçons parmi les nouveaux-nés ?

c Quelles remarques peux-tu faire ?

3 Vitesse de marche

Cours : 2-B

Cette carte représente l'ile Saint-Louis, à Paris.

a Sachant que le quai de Béthune s'étend sur environ 400 m, détermine l'échelle de la carte.

b En flânant, Martin a mis 10 minutes pour aller d'un bout à l'autre du quai de Béthune. À ce rythme, quelle distance aura-t-il parcourue en une heure ? Quelle aura donc été sa vitesse moyenne ?

c En continuant à marcher à la même vitesse, combien de temps mettra-t-il pour aller d'un bout à l'autre de la rue Saint-Louis en l'Île (540 m) ?

1 Quatrième proportionnelle

→ 11 14

Propriété Dans un tableau de proportionnalité dont on connait trois valeurs a, b et c, on peut déterminer la valeur manquante x.

Grandeur 1	a	c
Grandeur 2	b	x ?

Grandeur 1	b	x ?
Grandeur 2	a	c

Cette valeur, appelée quatrième proportionnelle, se calcule ainsi : $x = \dfrac{b \times c}{a}$.

Exemple 1 :

Six pots de miel « toutes fleurs » coutent 21 €. On suppose que le prix payé est proportionnel au nombre de pots achetés. Combien coutent cinq pots ?

- On regroupe les données dans un tableau de proportionnalité.

Nombre de pots	6	5
Prix (en €)	21	x ?

- On détermine x par le calcul : $x = \dfrac{5 \times 21}{6} = 17{,}5$.
- On en déduit que cinq pots de miel coutent 17,50 €.

Exemple 2 :

Un fichier de 225 Mo est téléchargé en 54 secondes.
Combien de temps faut-il pour télécharger dans les mêmes conditions un fichier de 850 Mo ?

- On suppose que le débit de la connexion est constant, c'est-à-dire que la durée du téléchargement est proportionnelle à la taille du fichier.
- On regroupe les données dans un tableau de proportionnalité.

Taille du fichier (en Mo)	225	850
Durée de téléchargement (en s)	54	x ?

- On détermine x par le calcul : $x = \dfrac{850 \times 54}{225} = 204$. Or 204 s = 3 min 24 s.
- On en déduit que la durée nécessaire pour télécharger un fichier de 850 Mo est 3 min 24 s.

Remarque :

L'**exemple 1** peut également se traiter en déterminant d'abord le prix d'un pot :
$21 \div 6 = 3{,}50$ donc un pot coute 3,50 €. Puis on détermine le prix de 5 pots : $3{,}50 \times 5 = 17{,}50$.

En revanche, ce « passage à l'unité » est plus délicat dans l'**exemple 2**. Le calcul direct de la quatrième proportionnelle se révèle alors très efficace !

2 Appliquer la proportionnalité

A Déterminer un pourcentage

→ 33

Exemple :

Dans un collège de 475 élèves, il y a 323 demi-pensionnaires.
Quel est le pourcentage de demi-pensionnaires dans ce collège ?
On cherche le nombre de demi-pensionnaires dans un collège de 100 élèves, dans lequel la proportion de demi-pensionnaires serait la même.

- On regroupe les données dans un tableau de proportionnalité.

Nombre de demi-pensionnaires	323	x ?
Nombre d'élèves	475	100

- On détermine x par le calcul : $x = \dfrac{323 \times 100}{475} = 68$.
- On en déduit que 68 % des élèves sont demi-pensionnaires dans ce collège.

B Vitesse moyenne

→ 39

Définition Si un mobile parcourt une distance d durant un temps t, alors sa vitesse moyenne v est le quotient de d par t. Autrement dit : $v = \dfrac{d}{t}$.

Exemple :

Lors d'une randonnée en montagne, nous avons parcouru 12,6 km en 4 h 30min.
Quelle a été notre vitesse moyenne ?

- Ici, d = 12,6 km, t = 4 h 30 min = 4,5 h.
- On a donc $v = \dfrac{12{,}6 \text{ km}}{4{,}5 \text{ h}} = 2{,}8$ km/h.

Remarque :

Il faut veiller à la cohérence des unités dans les applications !

C Grandeurs composées

→ 48

Exemple 1 : Débit

Une chasse d'eau fuit. Le gaspillage sur une journée représente 576 L.
Quel est le débit de la fuite, exprimé en L/min ?

- Le débit est la quantité d'eau écoulée par unité de temps. Pour exprimer le débit en L/min, il faut exprimer la quantité d'eau en L et le temps en min. Une journée compte 24 h, soit 1 440 min.

Volume d'eau (L)	576	x ?
Temps (min)	1 440	1

- $x = \dfrac{1 \times 576}{1\,440} = 0{,}4$. Le gaspillage est de 0,4 L en 1 min, donc le débit de la fuite est 0,4 L/min.

Exemple 2 : Masse volumique

L'or est un métal qui figure parmi les plus denses. Sa masse volumique est 19,3 kg/dm³. La banque de France conserve ce précieux métal sous la forme de pavés (appelés lingots) de 2,65 dm de hauteur et dont la base a une aire de 0,244 dm². Combien pèse un tel lingot ?

- Dire que la masse volumique de l'or est 19,3 kg/dm³ signifie que 1 dm³ d'or pèse 19,3 kg.
- On cherche la masse d'un lingot de volume 0,244 dm² × 2,65 dm = 0,6466 dm³.

Volume d'or (dm³)	1	0,6466
Masse (kg)	19,3	x ?

- $x = \dfrac{19{,}3 \times 0{,}6466}{1} = 12{,}48$. Un lingot d'or pèse donc 12,48 kg.

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Les grandeurs ci-dessous sont-elles proportionnelles ?

a. La taille d'une personne et son âge.

b. Le périmètre d'un cercle et son diamètre.

c. Le prix de vente d'une maison et le nombre de chambres dont elle dispose.

d. Le poids d'un bloc de marbre et son volume.

2 Calcule, dans chaque cas ci-dessous, la quatrième proportionnelle.

Grandeur 1	10	12
Grandeur 2	4	?

Grandeur 1	3	0,42
Grandeur 2	100	?

Grandeur 1	16	?
Grandeur 2	5	2

3 La recette d'un gâteau précise qu'il faut mettre 120 g de sucre pour 150 g de farine. Quelle quantité de sucre faut-il mettre pour 100 g de farine ?

4 Recopie et complète le tableau de proportionnalité suivant.

Masse de pommes (en kg)	3	2	
Prix (en €)	13,50		27

5 Calcule mentalement.

a. 20 % de 55 kg

b. 110 % de 38 cm

c. 1 % de 132 500 €

d. 5 % de 24 élèves

6 Détermine mentalement le pourcentage des grandeurs ci-dessous.

a. 23 billes sur 460

b. 4 km sur 200 km

c. 4,50 € sur 36 €

d. 21 élèves sur 28

7 Associe la proportion au pourcentage correspondant.

$\frac{3}{4}$ •	• 3 %
6 sur 200 •	• 34 %
14 parmi 35 •	• 30 %
$\frac{3}{10}$ •	• 40 %
0,34 •	• 75 %

8 Un bus scolaire a parcouru 35 km en 35 minutes. D'après toi, a-t-il roulé uniquement en ville ?

9 Combien de temps faut-il pour remplir une baignoire de 240 L en ouvrant un robinet dont le débit est de 12 L/min ?

10 Vrai ou Faux

P.1. Si deux bougies coutent 1,60 €, alors 3 bougies coutent 2,40 €.

P.2. Au sein d'une classe de 25 élèves, si 13 élèves sont des filles, alors le pourcentage de garçons dans la classe est de 52 %.

P.3. Si la population d'un village de 15 000 habitants diminue de 10 %, alors elle passe à 13 500 habitants.

P.4. Si je roule à 100 km/h durant 100 minutes, alors je parcours 100 km.

Exercices Je m'entraine

Quatrième proportionnelle

11 Au supermarché, William a acheté 3 kg de poires pour 13,50 €.

a. Que dire de la masse de poires achetées et du prix payé ?

b. Recopie et complète le tableau suivant.

.... (...)	3	6	2	1	0,5
.... (...)	13,5				

c. À quel prix au kg ces poires sont-elles vendues ?

d. Combien coutent 5,5 kg de ces poires ?

12 Au marché, Lucie achète 1,2 kg de carottes et paye 1,02 €.

a. Combien coutent 2 kg de carottes ?

b. Quelle masse de carottes peut-elle acheter avec 1,36 € ?

13 Le tableau suivant donne l'évolution de la taille de Rémi en fonction de son âge.

Âge (en années)	2	5	10	12
Taille (en cm)	80	100	125	...

Peut-on en déduire sa taille à 12 ans ? Explique.

14 À la boulangerie, 5 baguettes coutent 4,40 €. À quel prix seront vendues 3 baguettes ?

15 Voici les ingrédients pour préparer de la pâte à crêpes pour 8 personnes : 500 g de farine, 6 œufs, un litre de lait et 50 g de sucre.

a. Quelle est la liste des ingrédients pour douze personnes ?

b. Marie dispose de 700 g de farine, 9 œufs, 2 litres de lait et 100 g de sucre. Pour combien de personnes au maximum peut-elle préparer de la pâte à crêpes ?

16 Une imprimante imprime 75 pages par minute.

Combien de temps faut-il pour imprimer un dossier de 90 pages ?

17 *Fusibles*

Une installation électrique correctement conçue est protégée par des fusibles dont la valeur limite est donnée en ampères (A). La valeur limite d'un fusible est proportionnelle à la puissance maximale en watts (W) supportée par l'installation. Ainsi, un fusible de 16 A peut supporter une puissance maximale de 3 500 W.

a. Quelle puissance maximale peut supporter un fusible de 30 A ?

b. Quelle doit être la valeur limite d'un fusible pour une puissance maximale de 5 250 W ?

18 Steeve a téléchargé un fichier de 275 Mo en 44 secondes. La durée de téléchargement est proportionnelle à la taille du fichier téléchargé.

a. Recopie et complète le tableau suivant. Tu détailleras tes calculs.

Taille du fichier (Mo)	275	x	740	z
Durée de téléchargement (en s)	44	208	y	10

b. En dix minutes, Steeve peut-il télécharger un fichier de 4 Go ? Explique ta réponse.

c. Donne, en Mo/s, le débit de la connexion Internet de Steeve.

19 **QCM**

Pour faire le gâteau préféré de Naïma, il faut, pour 8 personnes, 75 g de farine et 100 g de sucre.

a. Le calcul qui donne la quantité de farine pour faire ce gâteau pour 5 personnes est...

R.1	R.2	R.3
$\frac{75 \times 8}{5}$	$\frac{8 \times 5}{75}$	$\frac{75 \times 5}{8}$

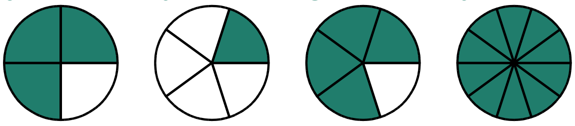
b. Pour faire ce gâteau pour 10 personnes, la quantité de sucre nécessaire est...

R.1	R.2	R.3
80 g	125 g	aucune de ces propositions

Pourcentages

20 Dans chaque cas, exprime la partie de disque coloriée sous forme d'un pourcentage.

a. **b.** **c.** **d.**



21 ***Calcul mental***

a. 50 % de 1 024
b. 25 % de 32
c. 100 % de 37
d. 1 % de 500
e. 10 % de 125
f. 200 % de 80

22 Exprime chaque quantité ci-dessous sous forme d'un pourcentage.

a. 45 personnes satisfaites sur 100 interrogées.
b. 12 € de remise sur un prix de 60 €.
c. 7 élèves d'une classe de 28 élèves.
d. 4,5 km sur un trajet de 9 km.
e. 500 Mo d'espace sur un disque dur de 500 Go.

23 Soit un verre en forme de cône de révolution, de hauteur 10 cm et de rayon de base 6 cm.

a. Calcule le volume total du verre, en cm^3, puis en centilitres.

b. On verse 25 cL de boisson dans ce verre. Quel pourcentage du volume total occupe la boisson versée ?

24 Sur 1 940 019 voitures vendues en France en 2015, 17 240 sont des voitures électriques. *(source : Comité des Constructeurs Français d'Automobiles.)*

Indique, sans calculatrice, si les voitures électriques représentent plus ou moins de 1 % des voitures vendues en France en 2015.
Vérifie ensuite à l'aide de la calculatrice.

25 Sur un site d'actualités en ligne, on pouvait lire : *« Après la forte hausse d'octobre, le chômage a légèrement baissé en novembre avec 15 000 demandeurs d'emploi de moins, en métropole, sans activité et inscrits à Pôle emploi, pour un total de 3,57 millions. »* *(source : lexpress.fr)*

Exprime, sous forme de pourcentage, la baisse du nombre de demandeurs d'emploi constatée en novembre.

26 On considère que le Brésil abrite 20 % de la biodiversité mondiale, avec 50 000 espèces de plantes, 5 000 vertébrés, 10 à 15 millions d'insectes et des millions de micro-organismes. *(source : fr.wikipedia.org)*

Calcule le nombre estimé d'espèces de plantes, de vertébrés et d'insectes sur Terre.

27 ***Prix***

a. Julien obtient une réduction de 15 % sur un vélo valant 158 €. Quel est le montant de la réduction obtenue par Julien ?

b. Patrick a obtenu une réduction de 27 € sur une console de jeu qui valait 225 €. Quel pourcentage de réduction a-t-il obtenu ?

c. Saïd a obtenu une baisse de 45 € sur un appareil photo, soit une baisse de 30 % du prix initial. Quel était le prix initial de l'appareil photo ?

28 À la suite de travaux d'isolation, d'un montant de 1 470 €, Yann calcule qu'il gagnera 15 % sur sa facture annuelle de chauffage. Sa facture précédente était de 980 €.

a. Au bout de combien d'années, si ses besoins en chauffage restent constants, Yann aura-t-il amorti ses travaux ?

b. Quelle sera l'économie réalisée sur 20 ans ?

29 Lucien veut emprunter 3 000 €.
À quelle banque va-t-il s'adresser ?

Banque du Nord	Banque du Sud
Cout du crédit : 2,5 % du capital emprunté	Cout du crédit : 3,2 % du capital emprunté
Assurance : 200 €	Assurance : 155 €

30 *« Depuis 2004, la consommation d'eau potable diminue en France. En 2012, 3,7 milliards de m³ ont été facturés pour les usages domestiques, contre 4,1 en 2008. »*
(Source : Ministère de l'écologie, du développement durable et de l'énergie).

a. Exprime, en m³, la diminution de la consommation d'eau entre 2008 et 2012.

b. Quel est le pourcentage de baisse de la consommation d'eau potable entre 2008 et 2012 ?

31 Sur l'emballage d'un hamburger, on peut lire que la quantité de sel contenue est de 1,9 g, soit 53 % des besoins quotidiens pour un enfant âgé de 9 à 12 ans.

De quelle quantité de sel, en grammes, a besoin quotidiennement un enfant âgé de 9 à 12 ans ?

32 ***Placement***

Luc a placé un capital de 1 500 € à sa banque, le 1er janvier 2015, à un taux d'intérêt annuel de 2 %. Cela signifie que chaque année la banque rajoute au capital 2 % de ce capital.

a. Quel sera le capital de Luc...

- le 1er janvier 2016 ?
- le 1er janvier 2017 ?

b. Au bout de combien d'années son capital initial aura-t-il augmenté de 30 % ?

33 Pour faire un gâteau, on fait fondre deux tablettes de chocolat : une tablette de 100 g dont la teneur en cacao est de 70 %, et une autre de 200 g dont la teneur en cacao est de 85 %.

a. Calcule la masse de cacao contenue dans le mélange ainsi constitué.

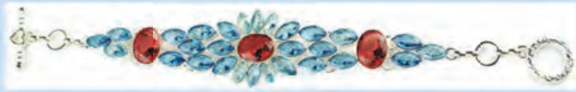
b. Quel est le pourcentage de cacao dans ce mélange de chocolat ?

34 Les élèves de deux classes de 4e d'un collège, soit au total 25 filles et 20 garçons, ont effectué un devoir commun. 60 % des filles et 50 % des garçons ont obtenu la moyenne.

Calcule le pourcentage d'élèves qui ont obtenu la moyenne dans l'ensemble de ces deux classes.

35 **TICE Tableur**

Un artisan fabrique et vend des bijoux. Il les propose en boutique, ainsi que sur son site Internet. Il souhaite étudier la répartition de ses ventes.



a. Reproduis la feuille de calcul suivante qui contient les ventes pour le mois de janvier.

	A	B	C
1		En boutique	En ligne
2	Ventes	95	65
3	%		

b. Quelle formule peux-tu saisir en B3 pour calculer le pourcentage des ventes en boutique par rapport aux ventes totales ? Complète alors les cellules B3 et C3.

c. En décembre, cet artisan avait effectué autant de ventes en boutique qu'en janvier, mais elles représentaient alors 47,5 % de ses ventes totales. Calcule le nombre de ventes en ligne réalisées en décembre, et vérifie avec ta feuille de calcul.

36 Un camping propose des mobil-homes et des emplacements pour des tentes.

a. 85 % des 65 emplacements sont occupés cette semaine. Combien d'emplacements sont encore libres ?

b. Par ailleurs, 63 mobil-homes sont occupés cette même semaine, soit 90 % des mobil-homes du camping. De combien de mobil-homes dispose ce camping ?

c. Détermine le taux d'occupation de ce camping durant cette semaine.

37 **QCM**

a. Une tablette de chocolat de 125 g contient 92,5 g de cacao. Le pourcentage de cacao contenu dans cette tablette est de...

R.1	R.2	R.3
74 %	92,5 %	32,5 %

b. En négociant auprès d'un constructeur automobile, un acheteur a obtenu 22 % de remise et a économisé 5 280 € sur le prix d'une voiture. Le prix initial de cette voiture était de...

R.1	R.2	R.3
22 000 €	24 000 €	27 280 €

Vitesse, distance et temps

38 *Records*

a. Le record du monde du 100 m a été établi le 16 aout 2009 par Usain Bolt en 9,58 s. Quelle a été sa vitesse moyenne, en m/s, lors de sa course ?

b. Le record du monde du 10 000 m a été établi le 2 aout 2005 par Kenenisa Bekele en 26 min 17,53 s. Quelle a été sa vitesse moyenne lors de sa course, en m/s puis en km/h ?

c. Le record de France au 4 × 200 m nage libre féminin a été établi le 22 avril 2008, avec un temps de 8 minutes. À quelle vitesse moyenne les 4 nageuses (Coralie Balmy, Elsa N'Guessan, Alicia Bozon et Ophélie-Cyrielle Etienne) ont-elles effectué leur relais ?

39 Cynthia est partie de chez elle à 8 h 30. Elle est arrivée à son lieu de vacances à 16 h 50, après avoir parcouru 625 km en voiture.

À quelle vitesse moyenne a-t-elle effectué le trajet ?

40 *Le canal du Midi en péniche*

La longueur du canal du Midi est de 240 km de Toulouse à l'étang de Thau, et la vitesse de navigation y est limitée à 8 km/h.

Quelle durée minimale faut-il pour effectuer ce trajet en péniche, hors temps de pause ?

41 La vitesse orbitale de la Terre autour du Soleil est de 29,783 km/s environ.

Quelle distance parcourt la Terre autour du Soleil en un an (soit environ 365,259 96 jours) ?

42 Le TGV « Nord » part de Lille à 10 h 20 et roule vers Paris à la vitesse de 227 km/h. Le TGV « Sud » part de Paris à 10 h 30 et roule vers Lille à la vitesse de 239 km/h. La distance Lille-Paris par le train est de 220 km environ.

Ces deux trains vont-ils se croiser avant 10 h 53 ?

43 *Le lièvre et la tortue*

Jeannot le lièvre et Louise la tortue décident de faire une course sur une distance de 500 m. La tortue s'élance à la vitesse de 2 km/h. Sûr de lui, Jeannot la laisse partir : il s'élancera à 50 km/h quand la tortue se trouvera à 20 m de la ligne d'arrivée. Que va-t-il se passer ?

44 *Éruption du mont St Helens en 1980*

« Une nuée ardente composée de gaz surchauffés, de cendre, de pierre ponce et de roche pulvérisée s'échappe latéralement à une vitesse initiale de 350 km/h et accélère rapidement pour atteindre les 1 080 km/h. »
(source : Wikipédia)

Quelle distance, en km, la nuée ardente a-t-elle parcourue en 30 s à sa vitesse maximale ?

45 *Vitesse de la lumière*

Des réflecteurs, posés sur le sol lunaire en 1969, servent à mesurer le temps que met la lumière pour faire un aller-retour de la Terre à la Lune. Des mesures récentes montrent que la lumière met en moyenne 2,564 s pour faire ce trajet, alors que la distance Terre-Lune est d'environ 384 402 km.

Calcule une valeur approchée de la vitesse de la lumière.

46 QCM

a. Une limace en a bavé pour parcourir 15 m en 20 minutes ! Sa vitesse moyenne a été de...

R.1	R.2	R.3
0,045 km/h	0,75 km/h	3 km/h

b. En roulant à la vitesse moyenne de 60 km/h, on parcourt 15 km en...

R.1	R.2	R.3
25 min	15 min	4 min

c. Un cycliste a roulé durant 3 h 30 min à la vitesse moyenne de 27 km/h. Il a parcouru...

R.1	R.2	R.3
81 km	89,1 km	94,5 km

47 Voici le principe de fonctionnement d'un radar tronçon.

Étape 1 : enregistrement de la plaque d'immatriculation et de l'heure de passage par un premier portique.

Étape 2 : enregistrement de la plaque d'immatriculation et de l'heure de passage par un second portique.

Étape 3 : calcul par ordinateur de la vitesse moyenne du véhicule entre les deux radars.

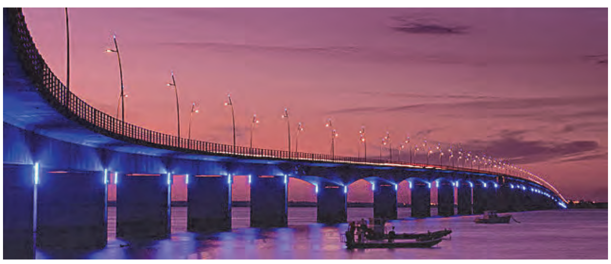
Étape 4 : calcul de la vitesse retenue, tenant compte des erreurs de précision du radar.

Étape 5 : si la vitesse retenue est supérieure à la vitesse limite, le véhicule est verbalisé et reçoit une contravention.

La vitesse retenue pour la contravention est calculée ainsi :

Vitesse moyenne calculée par ordinateur	Inférieure à 100 km/h	Supérieure à 100 km/h
Vitesse retenue	On enlève 5 km/h à la vitesse enregistrée.	On diminue la vitesse enregistrée de 5 %.
Exemples	Vitesse enregistrée : 97 km/h Vitesse retenue : 92 km/h	Vitesse enregistrée : 125 km/h Vitesse retenue : 118,75 km/h

Le pont d'Oléron est équipé d'un radar tronçon sur une distance de 3,2 km.
Sur ce pont, la vitesse est limitée à 90 km/h.



a. Les personnes suivantes ont reçu une contravention, à la suite de leur passage sur le pont d'Oléron.

- Madame Surget a été enregistrée à une vitesse moyenne de 107 km/h.
- Monsieur Lagarde a mis 2 minutes pour parcourir la distance entre les deux points d'enregistrement.

Détermine la vitesse retenue pour chacune de ces personnes.

b. La plaque d'immatriculation de Monsieur Durand a été enregistrée à 13 h 46 min 54 s, puis à 13 h 48 min 41 s.
A-t-il reçu une contravention ?

Grandeurs composées

48 On doit remplir une piscine dont le volume est de 50 m^3. Pour cela, on ouvre en même temps trois robinets ayant chacun un débit de 15 L/min.

Combien de temps dure le remplissage complet de la piscine ?

49 Le plan de travail d'une cuisine est fabriqué en granit (masse volumique du granit : 2 g/cm^3). Il mesure 2 m de long, 65 cm de profondeur et son épaisseur est de 4 cm.

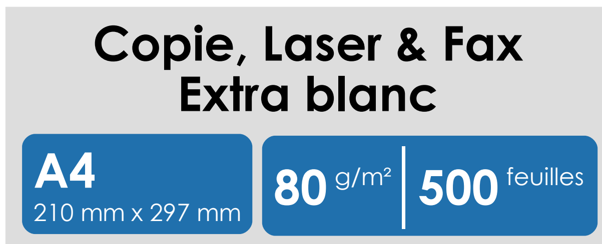
Combien pèse ce plan de travail ?

50 Un bassin d'eau de mer parallélépipédique a pour dimensions : 5 m × 3 m × 2,5 m.
La concentration en sel de l'eau qu'il contient est de 35 g/L.

Calcule, en kg, la masse de sel contenue dans ce bassin.

51 Le grammage d'un papier est l'unité qui en mesure la « force » : c'est la masse du papier par unité de surface. On l'exprime souvent en grammes par mètre carré (g/m^2).

Combien pèse la ramette dont voici l'étiquette ?



52 QCM

a. Si on laisse couler un robinet, dont le débit est de 15 L/min, pendant trois quarts d'heure, la quantité d'eau écoulée est...

R.1	R.2	R.3
11,25 L	675 L	3 L

b. La masse volumique du fer est de 7,8 g/cm^3. Une pièce de plomberie en fer pesant 2,5 kg a un volume de...

R.1	R.2	R.3
320 cm^3 environ	19,5 dm^3	19,5 cm^3

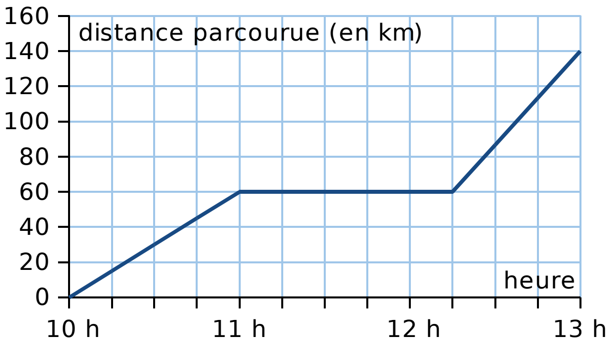
53 On a lu ceci dans une revue :

« Un automobiliste n'échappe pas aux lois de la physique. Ainsi la force d'impact d'un véhicule lancé à 120 km/h est 16 fois plus grande que celle d'un véhicule qui roule à 30 km/h. »

La force d'impact d'un véhicule est-elle proportionnelle à sa vitesse ? Argumente ta réponse.

54 En train, à la vitesse moyenne de 160 km/h, on parcourt le tunnel sous la Manche en vingt minutes environ. Quelle est la longueur de ce tunnel ?

55 Un camion a effectué un trajet illustré par le graphique suivant.



a. Quelle est la durée totale de son trajet ? Quelle distance totale a-t-il parcourue ?

b. La distance parcourue par ce camion est-elle proportionnelle à la durée du trajet ?

c. Calcule sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet.

56 Le débit moyen D d'un fluide dépend de la vitesse moyenne v du fluide et de l'aire S de la section d'écoulement. Ce débit est donné par la formule suivante : $D = S \times v$, où D est exprimé en m^3/s, S en m^2 et v en m/s.

Durant le remplissage d'une écluse, la vitesse moyenne d'écoulement de l'eau à travers la vantelle est v = 2,8 m/s. La vantelle a la forme d'un disque de rayon R = 30 cm.

a. Calcule l'aire S de la vantelle.

b. Détermine le débit moyen D de cette vantelle durant le remplissage.

c. Pour le remplissage d'une écluse de capacité 756 m^3, doit-on attendre plus ou moins de 15 minutes ?

57 Aux États-Unis, les températures se mesurent en degrés Fahrenheit (°F) et les distances routières en miles (mi).

a. 77 °F valent 25 °C et 86 °F valent 30 °C.
Les mesures des températures dans ces deux unités sont-elles proportionnelles ?

b. 250 mi représentent une distance de 402,336 km. 1 250 mi représentent une distance de 2 011,68 km.
Les mesures des distances dans ces deux unités sont-elles proportionnelles ?

58 La densité de population mesure le nombre moyen d'habitants par km².

a. En France métropolitaine, en 2015, elle est de 118 habitants par km² pour une superficie de 552 000 km². Quel est le nombre d'habitants en France métropolitaine en 2015 ?

b. La densité de population à Monaco est de 18 292 habitants par km². Si la France métropolitaine avait la même densité de population qu'à Monaco, combien d'habitants aurait-elle ?

c. La superficie de Monaco est de 2,02 km². Quel serait le nombre d'habitants à Monaco si ce pays avait la même densité de population qu'en France métropolitaine ?

59 Marco s'est rendu chez ses grands-parents en voiture. Sur la première moitié du trajet, le trafic était important : sa vitesse moyenne n'a été que de 80 km/h.
Les conditions de circulation s'améliorant ensuite, il a pu parcourir le reste du trajet à la vitesse moyenne de 100 km/h.

Quelle a été sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet ?

60 **Vrai ou Faux**

P.1. Si un élève sur trois est absent, alors le taux d'absentéisme est de 30 %.

P.2. Un faucon pèlerin vole vers sa proie à une vitesse de 180 km/h. Il est plus rapide qu'un ballon de foot tiré à la vitesse de 51 m/s.

P.3. 25 % de 50 % de 8 douzaines d'huitres, représentent 8 huitres.

Distance d'arrêt

Partie 1 : distance de freinage

La **distance de freinage DF** d'un véhicule est la distance parcourue entre le moment où les freins entrent en action et l'arrêt total du véhicule.
Le tableau suivant donne la distance de freinage en fonction de la vitesse **V** du véhicule.

Vitesse **V** (km/h)	30	50	90	110	130
Distance de freinage **DF** (m)	5	15	50	75	110

a. La distance de freinage est-elle proportionnelle à la vitesse du véhicule ? Explique.

b. Représente graphiquement **DF** en fonction de **V**. Tu prendras 1 cm pour 10 km/h en abscisse, et 1 cm pour 10 m en ordonnée.

c. Utilise ton graphique pour estimer la distance de freinage d'un véhicule qui roule à 70 km/h.

Partie 2 : distance de réaction

La **distance de réaction DR** est la distance parcourue durant le temps de réaction.
Ce temps est constitué du temps physiologique de perception-réaction du conducteur, et du temps mort mécanique d'entrée en action des freins. On l'évalue à 1 s pour une personne vigilante.

d. Montre que la distance de réaction d'un véhicule roulant à 50 km/h est de 14 mètres environ.

e. Reproduis et complète le tableau suivant.

Vitesse **V** (km/h)	50	90	130
Distance de réaction **DR** (m)	14		

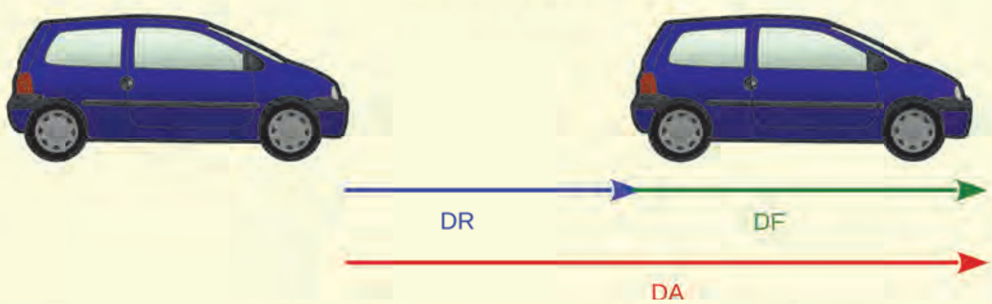
f. La distance de réaction est-elle proportionnelle à la vitesse du véhicule ? Justifie ta réponse.

g. **DR** peut être rapidement calculée de tête, en multipliant par 3 le nombre de dizaines de la vitesse **V** du véhicule. Vérifie, puis justifie cette approximation.

Partie 3 : distance d'arrêt

La **distance d'arrêt DA** est la distance nécessaire à un véhicule pour s'arrêter.
C'est donc le cumul de la distance de réaction et de la distance de freinage :

$$\mathbf{DA = DR + DF}$$



h. À 50 km/h, quelle distance est nécessaire pour s'arrêter ? Et à 90 km/h ? Et à 130 km/h ?

i. On utilise parfois la formule suivante pour estimer la distance d'arrêt d'un véhicule.

$$\mathbf{DA = (V \div 10)^2}$$

Vérifie que cette formule conduit à des résultats proches de ceux obtenus à la question précédente.

j. Sur les autoroutes françaises, où la vitesse est limitée à 130 km/h, la bande d'arrêt d'urgence est constituée de bandes blanches de 39 m de long, séparées par des espaces de 13 m. Explique ce slogan de la sécurité routière : « *Un trait = danger, deux traits = sécurité* ».

D2

Statistiques

Activités

1 Téléphone portable

Cours : 2

On a demandé à un groupe de 50 étudiants le montant mensuel (en euros) de leur abonnement de téléphone portable. En voici le détail :

23	14	14	36	36	36	41	18	36	18
23	32	23	41	18	18	36	27	36	27
23	32	18	32	27	36	36	36	36	32
41	14	41	23	14	41	18	27	36	41
14	14	36	32	27	14	36	27	27	27

a Calcule le montant mensuel moyen, en euros, de l'abonnement téléphonique de ces 50 étudiants.

b Construis et remplis un tableau pour lire plus facilement ces données.

c Comment calculer le montant mensuel moyen, en euros, de l'abonnement téléphonique de ce groupe d'étudiants à partir de ce tableau ? Justifie.

2 Pointures

Cours : 2

TICE Tableur

Un club de football a décidé de faire un achat groupé pour les chaussures de sport de ses équipes minimes.
Pour cela, il a récupéré les pointures de chaque sportif et les a rassemblées dans le tableau d'effectifs suivant.

Pointure	37	38	39	40	41	42
Effectif	2	8	7	10	6	3

a Combien de paires de chaussures de taille 39 ce club va-t-il acheter ?

b Recopie ces données dans une feuille de calcul.

C2 | 8

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Pointure	37	38	39	40	41	42	
2	Effectif	2	8	7	10	6	3	
3								
4								
5								
6								

c Quelle formule peut-on saisir dans la cellule H2 pour calculer l'effectif total ?

d Si l'on saisit =D1*D2 dans la cellule D3, que signifie le résultat affiché ?

e Utilise le tableur pour calculer la pointure moyenne de cette série statistique.

1 Étendue, médiane

→ 9

Exemple :
Chaque élève de 4ᵉB a indiqué le nombre de livres qu'il a lus en septembre.
Voici les résultats de l'enquête :

0 ; 1 ; 8 ; 2 ; 4 ; 10 ; 0 ; 0 ; 1 ; 5 ; 0 ; 1 ; 1 ; 3 ; 3 ; 4 ; 1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 0 ; 8 ; 0 ; 2 ; 2 ; 3

La **population** étudiée est constituée des élèves de 4ᵉB.
Le **caractère** étudié est le nombre de livres lus en septembre : c'est un **caractère quantitatif**.
L'**effectif total** est de 25.

Définition L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de cette série.

Exemple : 10 – 0 = 10, donc l'**étendue** de la série statistique précédente est de 10 livres.

Propriété Pour calculer la médiane d'une série statistique, on peut utiliser le tableau des effectifs cumulés croissants.

Exemple :

Nombre de livres lus	0	1	**2**	3	4	8	10
Effectif	6	6	**5**	3	2	2	1
Effectif cumulé	6	12	**17**	20	22	24	25

Les deux premières lignes du tableau ci-dessus constituent le tableau d'effectifs de la série.
Comme l'effectif total est 25, la valeur médiane est la 13ᵉ valeur de la série quand on les range dans l'ordre croissant.

La médiane de cette série est 2 car 2 est la plus petite valeur de la série pour laquelle l'effectif cumulé est supérieur ou égal à l'effectif total.

2 Moyenne pondérée

→ 20

Définition Pour calculer la **moyenne pondérée** M d'une série statistique :

- on effectue le produit de chacun des effectifs par la valeur du caractère associé ;
- on additionne les produits ;
- on divise la somme obtenue par l'effectif total de la série.

Si n_1, n_2, ..., n_p sont les effectifs du caractère, x_1, x_2, ..., x_p les valeurs associées, et N l'effectif total, alors : $M = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_px_p}{N}$.

Exemple : On peut calculer le nombre moyen de livres lus en 4ᵉB en septembre.

Nombre de livres lus	0	1	2	3	4	8	10
Effectif	6	6	5	3	2	2	1
Effectif × valeur	6 × 0	6 × 1	5 × 2	3 × 3	2 × 4	2 × 8	1 × 10

$$M = \frac{0\times6 + 1\times6 + 2\times5 + 3\times3 + 4\times2 + 8\times2 + 10\times1}{25} = \frac{59}{25} = 2{,}36$$

En moyenne, les élèves de 4ᵉB ont lu 2,56 livres au mois de septembre.

Exercices

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Calcule l'étendue de chaque série statistique ci-dessous.

a. 3 ; 5 ; 1 ; 0 ; 22 ; 17 ; 11 ; 5

b. 2,2 ; 3,9 ; 0,1 ; 9,9 ; 14 ; 9,5

c. – 3 ; 0 ; 16 ; – 8 ; 26 ; – 1 ; 11 ; – 11

2 Il manque une donnée dans la série statistique suivante (toutes les valeurs sont des nombres entiers).

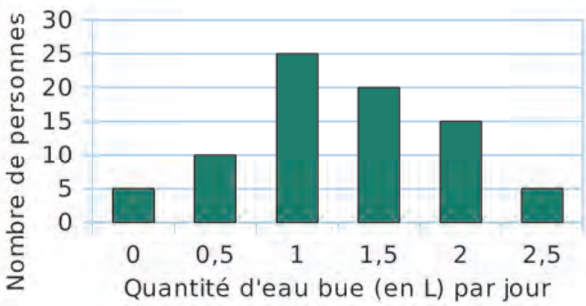
3 18 3 5 7 ...

a. Si l'étendue de cette série est 16, quelles sont les possibilités pour la donnée manquante ?

b. Même question si l'étendue de la série est 15.

c. Est-il possible de trouver une valeur pour que l'étendue soit égale à 13 ?

3 On a demandé à des personnes quelle quantité d'eau elles buvaient en moyenne chaque jour.



Donne l'effectif total, l'étendue et la médiane de cette série statistique.

4 Je suis une série statistique contenant trois données. Mon étendue est 12. Ma moyenne est 8. Ma plus grande valeur est 14. Qui suis-je ?

5 Calcule de tête la moyenne de chaque série statistique.

a.

Valeur	10	20	30	40	50	60	70
Effectif	0	5	0	5	0	0	0

b.

Valeur	10	20	30	40	50	60	70
Effectif	1	2	3	0	3	2	1

c.

Valeur	10	20	30	40	50	60	70
Effectif	17	17	17	17	17	17	17

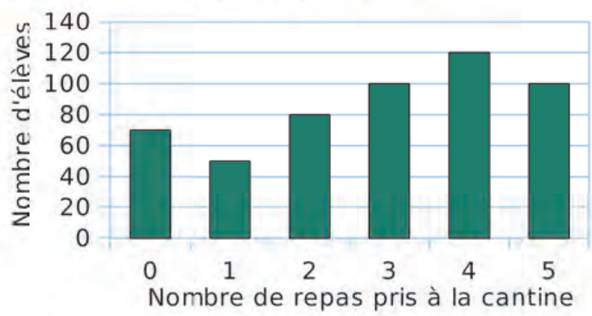
6 Le tableau ci-dessous présente le temps de transport quotidien des ouvriers d'une usine pour se rendre à leur travail.

Temps (en h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Effectif	2	10	20	20	10	2

a. Quel est le temps de transport moyen ?

b. Quelle est l'étendue de cette série ?

7 Observe le graphique suivant.



a. Que représente ce graphique, selon toi ?

b. Calcule le nombre moyen de repas par élève.

8 **Vrai ou Faux**

P.1. L'étendue de la série 23 ; 13 ; 0 ; 5 ; 100 est 100.

P.2. L'étendue d'une série statistique peut être inférieure à toutes les valeurs de la série.

P.3. Plus l'effectif total d'une série est grand, plus son étendue est grande.

Série statistique

9 Le tableau suivant donne les températures moyennes, en degrés Celsius, relevées dans les villes de Misnia et de Lipsia :

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Misnia	0	3	6	13	21	26	30	30	22	15	9	5
Lipsia	2	9	13	17	19	21	22	22	21	18	12	4

a. Pour chacune des deux villes, calcule l'étendue de la série statistique constituée par les températures relevées. À quoi correspond ce nombre ?

b. Calcule la médiane de chaque série statistique.

10 QCM

a. L'étendue de la série 3 ; 18 ; 11 ; 7 ; 15 est...

R.1	R.2	R.3
11	15	12

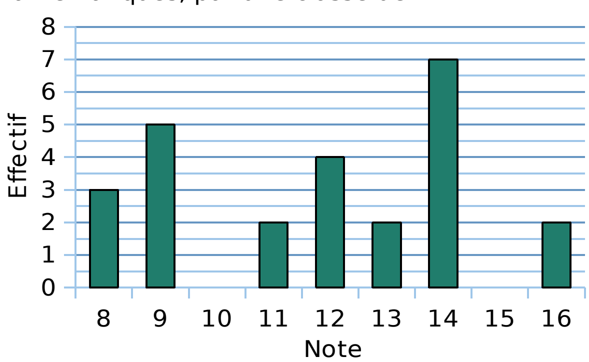
b. Quelle série statistique a pour étendue 10 ?

R.1	R.2	R.3
10 ; 10 ; 10 ; 10	0 ; 10 ; 20 ;10	5; 10 ;15 ;10

c. Si la médiane et la moyenne d'une série sont égales à 20, alors...

R.1	R.2	R.3
On ne peut rien dire sur l'étendue	L'étendue est supérieure à 20	L'étendue est inférieure à 20

11 Voici le diagramme en barres représentant la répartition des notes obtenues à un contrôle de mathématiques, par une classe de 4e.



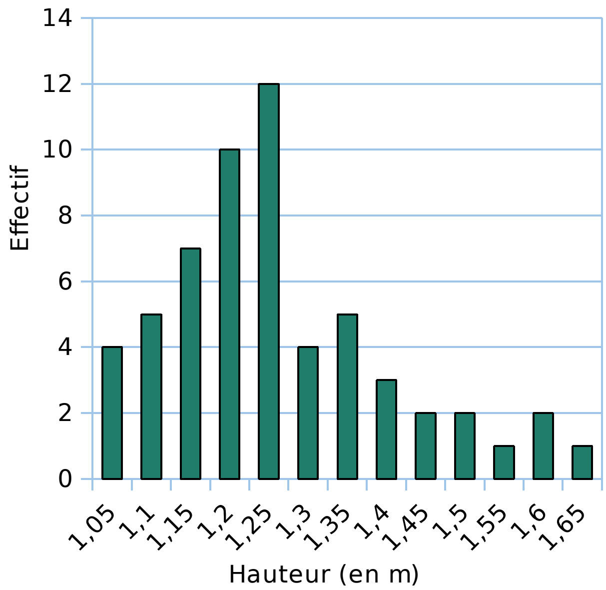
a. Combien d'élèves ont obtenu la note 8 ?

b. Calcule l'effectif total de cette série.

c. Calcule l'étendue de cette série.

d. Calcule la médiane de cette série.

12 Un professeur a récapitulé les résultats de deux classes de 4e, en saut en hauteur, dans un diagramme en barres.



a. Quelle est l'étendue de cette série ?

b. Détermine une médiane de cette série.

c. Quel pourcentage d'élèves a sauté au moins 1,40 m ?

d. Quel pourcentage d'élèves a sauté au plus 1,25 m ?

13 On a relevé les performances, en mètres, obtenues par des élèves d'une classe au lancer du poids.

3,45 ; 5,2 ; 5,35 ; 4,3 ; 6,1 ; 4,28 ; 5,18 ; 4,9 ; 6,21 ; 5,36 ; 5,22 ; 4,9 ; 3,95 ; 4,72 ; 5,5 ; 6,13 ; 5,6 ; 4,19 ; 4,75 ; 5,04 ; 4,88 ; 5,6 ; 6,04 ; 5,43.

a. Quel est l'effectif total de cette série ?

b. Range les données dans l'ordre croissant puis détermine une médiane de cette série.

c. Quelle est l'étendue de cette série ?

d. Quel est le pourcentage des performances inférieures à 5 m ?

e. Même question pour les performances supérieures à 8 m.

Moyenne pondérée

14 Dans une classe, on relève la durée, en minutes, du trajet maison-collège. Les données, par élève, sont les suivantes.

30	45	10	30	50	20	25	25	60	30	20
25	20	25	5	10	45	30	20	25	5	10
25	45	10								

a. Complète le tableau d'effectifs suivant (les valeurs de la série seront rangées dans l'ordre croissant).

Durée du trajet								
Effectif								

b. Calcule la durée moyenne du trajet des élèves de cette classe.

15 Une classe de 27 élèves a obtenu les notes suivantes à un devoir.

12	7	8	10	16	15	16	12	10	7
12	10	16	17	5	8	5	10	11	13
11	7	9	16	11	12	9			

a. Regroupe ces données dans un tableau d'effectifs.

b. Calcule la moyenne de la classe pour ce devoir (arrondie au dixième).

c. Combien d'élèves ont eu au moins cette moyenne ?

16 Calcule la moyenne de la série suivante, arrondie au dixième.

Valeur	26	33	152	45	89	78	45
Coefficient	2	5	3	4	8	10	6

17 **QCM** On considère cette série.

Valeur	5	10	15
Coefficient	3	5	2

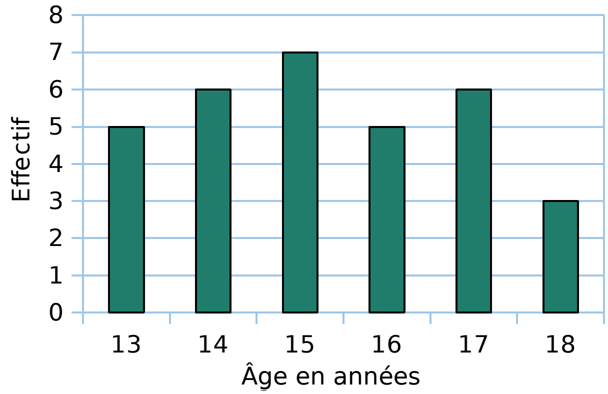
a. Quelle est la moyenne de cette série ?

R.1	R.2	R.3
9,5	10	5

b. Quelle valeur de coefficient 10 faut-il ajouter à cette série pour obtenir 20 de moyenne ?

R.1	R.2	R.3
30,5	20	10

18 Voici la répartition par âge des membres d'un club d'échecs.



a. Recopie puis complète le tableau.

Âge en années						
Effectif						

b. Calcule l'âge moyen des membres de ce club.

19 **TICE Tableur**

Calcule, à l'aide d'un tableur, la moyenne de la série présentée à l'exercice **16**.

Pour chaque valeur, si on l'augmente de 1, de combien augmente la moyenne ?

20 On considère le nombre de frères et sœurs d'un groupe de personnes. Les données statistiques sont présentées dans le tableau suivant.

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif	3	6	7	9	5	2	1	1

a. Donne l'effectif total de cette série.

b. Calcule le nombre moyen de frères et sœurs.

21 En mathématiques, Adélaïde a des notes de contrôles en classe (coefficient 2) et des notes de devoirs maison (coefficient 1).

Voici les notes d'Adélaïde pour un trimestre :

Contrôle : 7 9 11 9,5 10,5 8

Devoir maison : 13 14 12 11

a. Pour calculer sa moyenne du trimestre, par quel nombre faudra-t-il diviser ? Calcule cette moyenne.

b. Pour augmenter sa moyenne, est-il préférable d'avoir 3 points de plus à un devoir maison, ou 2 points de plus à un contrôle ?

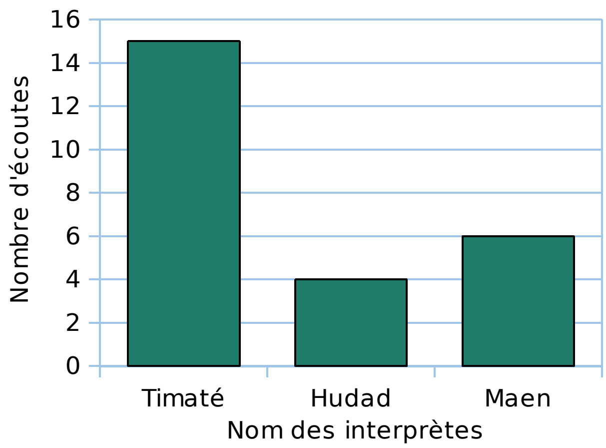
22 Louise a téléchargé une liste de lecture sur son lecteur MP4.

Titre de la chanson	Nom de l'interprète	Durée de la chanson en secondes
Mamatéou	Timaté	232
La différence	Timaté	211
Amazing	Timaté	214
Tes racines	Timaté	175
YoungBov	Hudad	336
La ficelle	Maen	191
Fou fou fou	Maen	184
Nina	Maen	217

a. Quelle est la durée totale de cette liste ? Exprime cette durée en minutes et secondes.

b. Détermine le pourcentage de chansons dont la durée est supérieure à 3 min 30 s.

c. Louise décide d'utiliser la fonction « aléatoire » de son MP4. Cette fonction choisit au hasard une chanson parmi celles qui sont présentes dans la liste de lecture. Elle utilise 25 fois la fonction « aléatoire » de son MP4 et note à chaque fois le nom de l'interprète. Les résultats qu'elle obtient sont notés dans le graphique ci-dessous.



Détermine la fréquence d'écoute de Hudad.

23 **TICE Tableur**

Des ingénieurs de l'Office National des Forêts font le marquage d'un lot de pins destinés à la vente. Ils effectuent une mesure de diamètre sur chaque arbre et répertorient toutes les données dans la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Diamètre (cm)	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	
2	Effectif	2	4	8	9	10	12	14	15	11	4	3	

a. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule M2 pour obtenir le nombre total d'arbres ?

b. Calcule, en centimètres, le diamètre moyen de ce lot. Tu arrondiras le résultat à l'unité.

24 À l'issue de la 18^{e} étape du tour de France cycliste 2014, les coureurs ont parcouru 3 260,5 kilomètres depuis le départ. Voici le classement général des neuf premiers coureurs.

Classement	NOM Prénom	Pays d'origine	Temps de course de chaque coureur
1	NIBALI Vincenzo	Italie	80 h 45 min
2	PINOT Thibaut	France	80 h 52 min
3	PÉRAUD Jean-Christophe	France	80 h 53 min
4	VALVERDE Alejandro	Espagne	80 h 53 min
5	BARDET Romain	France	80 h 55 min
6	VAN GARDEREN Tejay	États-Unis	80 h 57 min
7	MOLLEMA Bauke	Pays-Bas	80 h 59 min
8	TEN DAM Laurens	Pays-Bas	81 h 00 min
9	KONIG Leopolp	République Tchèque	81 h 00 min

a. Calcule la différence entre le temps de course de Leopold Konig et celui de Vincenzo Nibali.

b. On considère la série statistique des temps de course. Que représente, pour la série statistique, la différence calculée à la question **a** ?

c. Quelle est la médiane de cette série statistique ? Explique ta démarche.

d. Quelle est la vitesse moyenne, en km/h, du premier français Thibaut Pinot ? Arrondis la réponse à l'unité.

25 **Vrai ou Faux**

P.1. Si l'étendue d'une série statistique est nulle, alors toutes les valeurs de la série sont égales.

P.2. L'étendue d'une série statistique ne peut jamais être égale à la médiane de cette série.

P.3. Si on double toutes les valeurs d'une série statistique, alors l'étendue est doublée elle aussi.

P.4. Si on ajoute 5 à toutes les valeurs d'une série statistique, alors son étendue augmente de 5 elle aussi.

26 Une entreprise emploie sept femmes et douze hommes. Leurs salaires nets mensuels sont (en €) :

- Femmes : 1 090 ; 1 044 ; 3 470 ; 1 224 ; 1 250 ; 1 438 ; 1 072.
- Hommes : 1 405 ; 1 070 ; 1 948 ; 1 525 ; 1 090 ; 1 002 ; 1 525 ; 1 968 ; 1 224 ; 2 096 ; 1 703 ; 1 126.

a. Calcule l'étendue de chacune des séries. Comment peux-tu interpréter ces résultats ?

b. Calcule le salaire moyen pour chaque sexe. Comment peux-tu interpréter ces résultats ?

c. Détermine une médiane des salaires pour chaque série. Comment peux-tu interpréter ces résultats ?

Baccalauréat

Naïma est en Terminale S, spécialité Maths.

L'an dernier, elle a assez bien réussi l'épreuve anticipée de Français puisqu'elle peut compter sur la note de 13, coefficient 4. Elle a également eu 11 en TPE, coefficient 2.

Cette année, elle souhaite utiliser un fichier tableur pour simuler ses résultats avec les notes qu'elle pense obtenir.

TICE Tableur

Voici le début de son travail :

	A	B	C	D
1	Matière	Coefficient	Note	Total matière
2	Mathématiques	9		
3	Physique-chimie	6		
4	SVT	6		
5	Français	4	13	52
6	TPE	2	11	22
7	Philosophie	3		
8	Histoire-géographie	3		
9	LV1	3		
10	LV2	2		
11	EPS	2		
12	*Total des coefficients :*		*Total à l'examen :*	
13			Moyenne à l'examen	

Partie 1

a. Reproduis ce tableau dans une feuille de calcul.

b. Quelle formule Naïma a-t-elle entrée dans la cellule D5 ?
Recopie cette formule pour les autres matières.

c. Saisis une formule, dans la cellule B11, permettant de calculer la somme des coefficients.

d. Voici les notes minimales que Naïma pense obtenir :
Mathématiques : 11 ; Physique-Chimie : 9 ; SVT : 8 ; Philosophie : 8 ;
Histoire-Géographie : 10 ; LV1 : 8 ; LV2 : 12 ; EPS : 10.
Inscris ces notes dans la feuille de calcul.

e. Propose des formules pour les cellules D11 et D12.
Si elle obtenait de telles notes à l'examen, Naïma aurait-elle plus de 10 de moyenne ?

f. Dans quelles matières lui suffirait-il d'obtenir un point de plus pour dépasser la moyenne ?

Partie 2

Johanna, la meilleure amie de Naïma, est en Terminale ES, spécialité Maths.

Naïma lui transmet sa feuille de calcul pour qu'elle puisse, elle aussi, faire ses simulations.

g. En effectuant les recherches nécessaires, modifie la feuille de calcul afin qu'elle convienne à Johanna.

h. Johanna a obtenu 11 en Français, 15 au TPE et 9 en Sciences. Elle espère les mêmes notes que Naïma dans les matières communes et 11 en SES.
Si elle obtenait ces notes au Bac, aurait-elle la moyenne ?

D3

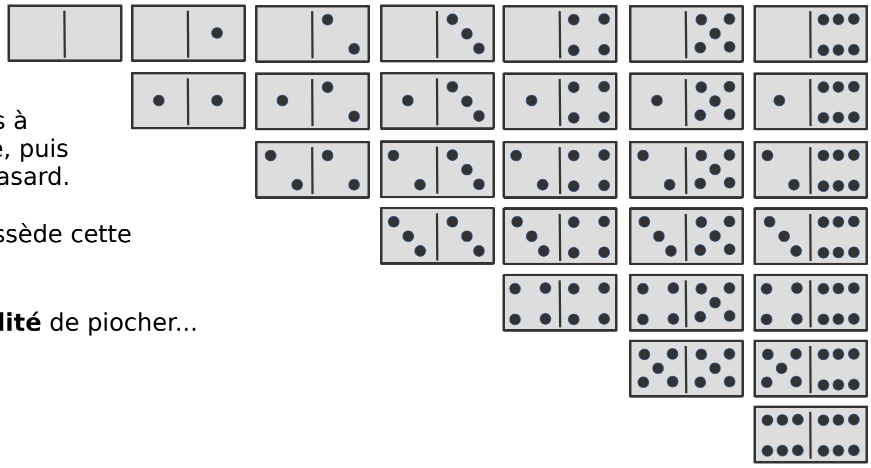
Probabilités

Activités

1 Dominos

Cours : 1

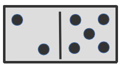
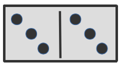
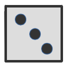
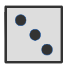
Un jeu de dominos est constitué des pièces ci-contre.



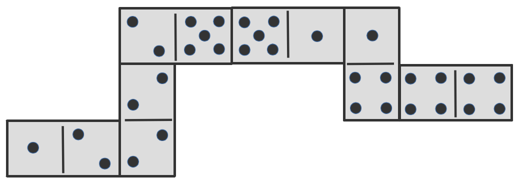
On place tous ces dominos à l'intérieur d'un sac opaque, puis on pioche un domino au hasard.

a Combien d'**issues** possède cette **expérience aléatoire** ?

b Quelle est la **probabilité** de piocher...

- le domino  ?
- le domino  ?
- un domino « double » ?
- un domino qui contient au moins un  ?
- un domino ne contenant aucun  ?

c Le jeu a commencé, voici les dominos déjà placés.



Dominique s'apprête à piocher un domino au hasard. Quelles sont ses chances de piocher un domino qu'il pourra poser à la suite des dominos déjà placés ?

2 Répéter une expérience aléatoire

Cours : 2

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé équilibré à six faces, numérotées de **1** à **6**, et à observer le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

a Répète dix fois de suite cette expérience, et note le nombre de fois où chaque face apparait. Donne la fréquence d'apparition de chaque nombre sur ces dix lancers. Exprime cette fréquence en pourcentage.

b Rassemble tes résultats avec ceux des autres élèves de la classe, afin de déterminer la fréquence d'apparition de chaque nombre sur la totalité des lancers effectués par toute la classe.

Présente les résultats dans un tableau similaire à celui ci-dessous.

Nombre observé sur la face supérieure	1	2	3	4	5	6
Fréquence d'apparition sur mes dix lancers						
Fréquence d'apparition sur tous les lancers effectués en classe						

c Que remarques-tu ?

3 Simulations et tableur

Cours : 2

On souhaite observer l'évolution de la fréquence d'apparition de la face **5** lorsqu'on lance un très grand nombre de fois un dé cubique équilibré.

Pour cela, on peut utiliser :

- un logiciel de simulation, comme un tableur par exemple.
- un logiciel de programmation comme SCRATCH (voir **Activité 11** page 190)

TICE Tableur

a Recopie ce tableau dans une feuille de calcul.

	A	B	C	D	E	F
1	Nombre de lancers depuis le début	Face obtenue	Test : face 5 obtenue ?	Nombre d'apparition du « 5 » depuis le début	Fréquence d'apparition du « 5 » depuis le début	
2						
3						

b Dans la cellule A2, saisis 1 .
Dans la cellule B2, saisis la formule =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6) .
Explique ce que permet de simuler cette formule.

c Afin de répéter cette expérience aléatoire 500 fois, saisis =A2+1 dans la cellule A3. Sélectionne ensuite la plage de cellules allant de A3 à A502 (pour cela, saisis A3:A502 dans la *Zone de nom*), puis recopie la formule vers le bas (Menu *Édition* puis *Remplir* puis *Vers le bas*).
Il suffit alors de double-cliquer sur la poignée de recopie de la cellule B2 pour obtenir une simulation de 500 lancers de dés !

d Dans la cellule C2, saisis la formule =SI(B2=5;1;0) . Recopie-la ensuite vers le bas.
Explique les résultats obtenus dans les cellules de la colonne C.

e En D2, saisis la formule =C2 . Quelle formule peut-on saisir en D3, puis recopier vers le bas, pour compter le nombre d'apparitions de la face **5** depuis le premier lancer ?

f Quelle formule peut-on saisir en E2, puis recopier vers le bas, pour obtenir les fréquences d'apparition de la face **5** depuis le premier lancer ? Complète ainsi le tableau, en formatant les cellules de la colonne E, au format *Pourcentage*.

g Observe les pourcentages affichés dans la colonne E. Que remarques-tu ?
Effectue de nouveau 500 lancers, en demandant au logiciel de recalculer toutes les formules (appuie simultanément sur les touches CTRL+Shift+F9, ou bien sur F9, suivant le logiciel utilisé).
Ta remarque reste-t-elle encore valable ?

h Représente graphiquement les fréquences cumulées d'apparition du **5** (colonne E) en fonction du nombre de lancers simulés (colonne A). Pour cela, utilise le graphique de type *XY Dispersion* du tableur.

i Vers quel pourcentage semblent se stabiliser les fréquences d'apparition du **5** lorsque le nombre de lancers devient très grand ? Peux-tu l'expliquer ?

j Applique les modifications nécessaires à ta feuille de calcul afin d'observer l'évolution de la fréquence d'apparition de PILE lorsqu'on lance 500 fois de suite une même pièce de monnaie bien équilibrée.

1 Notion de probabilités

7

Définitions 1 Lorsqu'on effectue une **expérience aléatoire**, on ne peut pas prévoir quel va être son résultat, parmi ses différentes **issues** possibles.

La théorie des probabilités consiste, pour une expérience aléatoire, à tenter de mesurer les chances de réalisation d'un **évènement**, en lui attribuant un nombre compris entre 0 et 1. Ce nombre est appelé **probabilité** de l'évènement considéré.

La probabilité d'un **évènement impossible** est 0, celle d'un **évènement certain** est 1.

Exemples :

- On lance un dé à jouer classique, à six faces, *non truqué*. Les **issues** sont : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
- Un joueur professionnel de basket tente un lancer franc. Les **issues** sont « Panier réussi » et « Panier manqué ».
- On lance une pièce de monnaie *truquée*. Les **issues** sont « Pile » et « Face ».

Définition 2 Lorsque les issues d'une expérience aléatoire ont toutes autant de chances de se réaliser, c'est-à-dire que les probabilités de réalisation des différentes issues sont égales, on dit qu'elles sont **équiprobables**.

Propriété 1 En cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement s'obtient en divisant le nombre d'issues favorables à l'évènement par le nombre total d'issues de l'expérience.

Exemples :

- On lance un dé à jouer classique, à six faces, *non truqué*. Chaque face a donc autant de chances de sortir qu'une autre, les issues sont donc équiprobables.

  Ainsi, la probabilité d'obtenir la face 5 est de $\frac{1}{6}$, tout comme la probabilité d'obtenir n'importe quelle autre face.
- Comme deux faces portent un nombre multiple de 3 parmi les six faces du dé (la face 3 et la face 6), alors la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est $\frac{2}{6}$, soit $\frac{1}{3}$, soit environ 33,33 %.

Définition 3 L'**évènement contraire** d'un évènement A est l'évènement, noté $\overline{A}$, qui est réalisé lorsque A ne l'est pas.

Exemple :

On reprend l'exemple du dé à jouer : l'évènement contraire de l'évènement « *La face obtenue porte un nombre multiple de 3.* » est l'évènement « *La face obtenue n'est pas un multiple de 3.* »

Propriété 2 La somme des probabilités d'un évènement et de son contraire est égale à 1 : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Exemple :

On lance un dé à jouer classique, à six faces, *non truqué*.

On a vu que la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est $\frac{1}{3}$.

On en déduit que la probabilité de ne pas obtenir un multiple de 3 est $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

2 Des fréquences aux probabilités

→ 13

Propriété

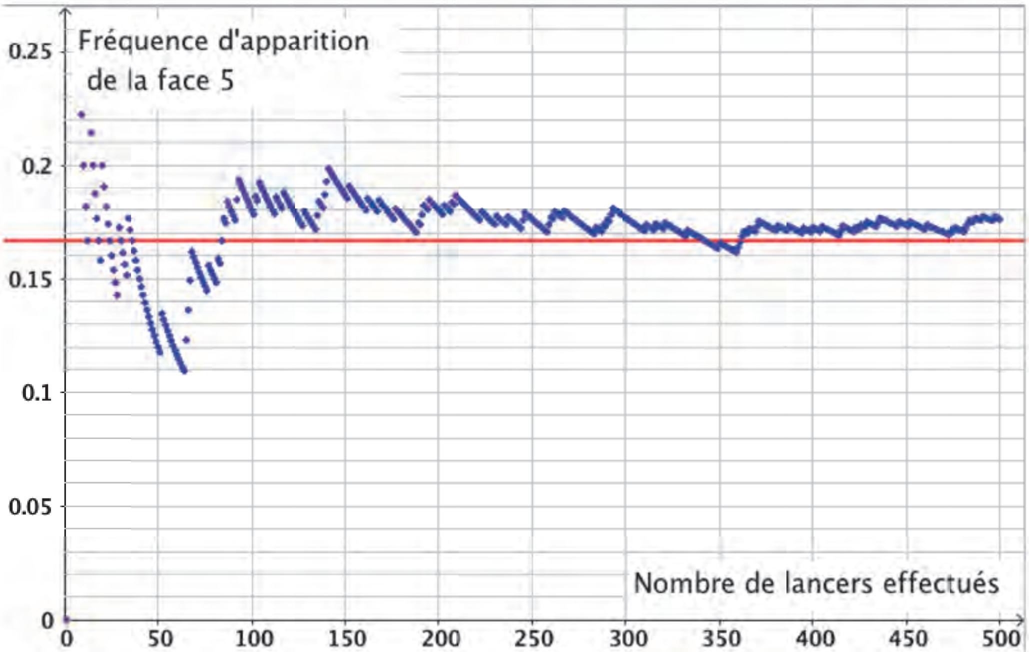
On considère une expérience aléatoire, et A un évènement dont la probabilité est notée P(A).

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois cette expérience aléatoire, la fréquence d'apparition de l'évènement A a tendance à se stabiliser autour du nombre P(A).

Exemple 1 :

On a lancé plusieurs fois un dé à jouer classique, à six faces, *non truqué*. Voici un tableau donnant la fréquence d'apparition de la face **5** en fonction du nombre de lancers effectués.

Nombre de lancers effectués	10	50	200	500	5 000
Fréquence d'apparition de la face **5**	40 %	12 %	18 %	17,7 %	17,12 %



On constate que la fréquence d'apparition de la face **5** se rapproche de 17 %. Cela illustre que la probabilité d'obtenir la face **5** est $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$.

Exemple 2 :

On considère une pièce de monnaie *truquée*. Ne connaissant pas *a priori* la probabilité d'obtenir **PILE**, on a lancé cette pièce un grand nombre de fois, et les résultats sont regroupés dans le tableau suivant.

Nombre de lancers effectués	10	50	200	500	5 000
Fréquence d'apparition de **PILE**	60 %	55 %	63 %	65 %	67 %

Au vu du tableau, on peut estimer que la pièce est truquée de façon à ce qu'on ait deux chances sur trois de tomber sur **PILE** car $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$.

Remarque :

Certains logiciels, comme les tableurs notamment, permettent de **simuler** la répétition d'un très grand nombre d'expériences aléatoires identiques.

Exercices

À l'oral !

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

1 Les phrases ci-dessous décrivent-elles une expérience aléatoire ? Justifie, et si oui, précise les issues de l'expérience.

a. On lance un dé ordinaire à six faces.

b. On choisit un chocolat blanc dans un ballotin de chocolats assortis.

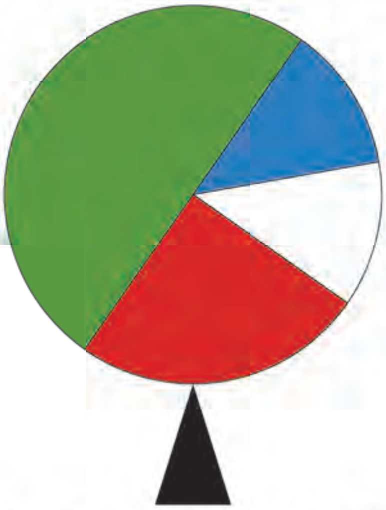
c. On entre dans une salle de cinéma, d'une capacité de cent personnes, et on se demande combien il reste de places libres.

d. Un candidat au permis de conduire passe l'épreuve de conduite.

2 On lance une pièce de monnaie truquée pour laquelle la probabilité de tomber sur PILE est de 47 %.

Donne la probabilité de tomber sur FACE.

3 On lance la roue suivante et on observe sur quel secteur elle s'arrête.



a. Combien d'issues possède cette expérience aléatoire ? Ces issues sont-elles équiprobables ? Explique ta réponse.

b. Classe les différentes couleurs dans l'ordre croissant de leur probabilité.

c. Recopie et complète : « *Il y a une chance sur ... que la roue s'arrête sur le secteur vert.* ».

d. Écris d'autres phrases analogues pour les autres couleurs possibles.

e. Exprime les probabilités de chaque couleur sous forme d'un pourcentage.

4 Le tableau suivant donne la répartition des élèves de 4^e d'un collège, suivant leur classe et leur régime scolaire (externe ou demi-pensionnaire).

	4^e A	4^e B
Externe	11	16
D.P.	13	10

On interroge au hasard un de ces élèves.

a. Combien d'issues possède cette expérience aléatoire ?

b. Quelle est la probabilité que l'élève interrogé...

- soit un élève externe de 4^e B ?
- soit un élève demi-pensionnaire ?
- soit un élève externe ?

5 Nathan a lancé plusieurs fois une pièce de monnaie équilibrée. Il a obtenu 8 fois PILE et 12 fois FACE.

a. Quelle est la fréquence d'apparition de l'issue PILE ?

b. Quelle est la probabilité d'apparition de l'issue PILE ?

c. Comment expliques-tu la différence entre les deux réponses précédentes ?

6 **Vrai ou Faux**

P.1. Si la probabilité qu'il pleuve demain est estimée à 80 %, alors il y a une chance sur cinq qu'il ne pleuve pas demain.

P.2. On choisit au hasard une des lettres du mot PROBABILITE. La probabilité d'obtenir une consonne est 50 %.

P.3. On a lancé cinq fois un dé cubique équilibré, et on n'a jamais obtenu la face 6. La probabilité de l'obtenir au prochain lancer est donc supérieure à $\frac{1}{6}$.

Notion de probabilité

7 Une urne opaque contient 9 boules rouges et 6 boules bleues, indiscernables au toucher. On choisit une boule au hasard dans l'urne.

a. Que permettent d'affirmer les mots de l'énoncé « opaque » et « indiscernables » ?

b. Détermine la probabilité que la boule choisie soit bleue.

c. Détermine, de deux manières différentes, la probabilité que la boule choisie soit rouge.

8 On lance un dé équilibré à six faces. Sur chacune des faces de ce dé, est inscrite une des lettres du mot **CHANCE**.

Quelle est la probabilité que le dé tombe sur une face où est inscrite...

a. la lettre A ?

b. la lettre C ?

c. une voyelle ?

d. une consonne ?

e. une des lettres du mot suivant ?

9 **QCM**

a. Pauline a lancé deux dés à jouer ordinaires et annonce que la somme des nombres obtenus est 9. L'évènement « *Un des dés est tombé sur la face 2.* » est un évènement...

R.1	R.2	R.3
certain	impossible	fréquent

b. Une galette des rois a été partagée en 6 parts égales. Karim a pris la première part et, comme il n'a pas eu la fève, il en prend une deuxième aussitôt ! La probabilité qu'il tombe sur la fève est...

R.1	R.2	R.3
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

c. On pioche au hasard un jeton dans un sac qui en contient 5 bleus, 5 blancs et 30 rouges. La probabilité que le jeton choisi soit bleu est...

R.1	R.2	R.3
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

10 On place les pions ci-dessous dans une boite opaque, puis on en choisit un au hasard.

a. On demande la probabilité d'obtenir un pion bleu, et Raphaël répond : « *C'est 9, car il y a 9 pions bleus !* ». Que penses-tu de sa réponse ? Corrige-la si nécessaire.

b. On demande la probabilité d'obtenir un pion jaune, et Raphaël répond : « *C'est $\frac{1}{3}$, car il n'y a que trois couleurs différentes possibles !* »
Sa réponse est-elle correcte ? Que penses-tu de sa justification ?

c. On demande la probabilité d'obtenir un pion ni bleu, ni jaune, et Raphaël répond : « *Pour cela, il faut obtenir le pion rouge, la probabilité demandée est donc $\frac{1}{3}$!* ». Que penses-tu de sa réponse ? Corrige-la si nécessaire.

11 En appuyant sur un bouton, on allume une des cases de la grille ci-dessous, au hasard.

On suppose que les cases ont toutes la même probabilité de s'allumer lorsqu'on appuie sur le bouton.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

a. Quelle est la probabilité...

- que la case **1** s'allume ?
- qu'une case marquée d'un chiffre impair s'allume ?

b. Dans le cadre de cette expérience aléatoire, décris un évènement de probabilité $\frac{1}{3}$.

c. On suppose à présent que les cases **1** et **7** sont déjà allumées. En appuyant à nouveau sur le bouton, une autre case va s'allumer.
Quelle est alors la probabilité que les trois cases allumées soient alignées ?

Des fréquences aux probabilités

12 On lance un bouchon et on observe la position qu'il prend une fois tombé, parmi les deux possibilités suivantes.

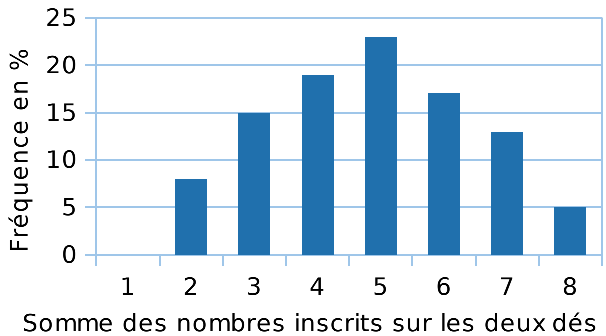
Position A	Position B
	

a. Selon toi, les positions A et B sont-elles équiprobables ?

b. Propose un protocole expérimental permettant de confirmer ou d'infirmer ta réponse.

13 On lance deux dés tétraédriques équilibrés, dont les quatre faces sont numérotées de 1 à 4. On s'intéresse à la somme des nombres lus sur chacune des faces sur lesquelles reposent les dés.

On a simulé 1 000 lancers avec un tableur. Le graphique suivant représente la fréquence d'apparition de chaque somme obtenue.



a. Par lecture graphique, donne la fréquence d'apparition de la somme 3.

b. Même question pour la somme 1.
Comment expliques-tu cette valeur ?

c. Décris tous les lancers qui permettent d'obtenir la somme 3 en lançant les dés.

d. Déduis-en la probabilité d'obtenir la somme 3 en lançant les dés. Exprime cette probabilité en pourcentage.

e. Explique pourquoi ce résultat est différent de celui obtenu à la question **a**.

14 Mattéo se trouve dans une station de sports d'hiver. La météo annonce que la probabilité qu'il neige demain est de 80 %. Laquelle des affirmations suivantes te semble correcte ? Pourquoi ?

Affirmation A : Il va neiger demain sur environ 80 % du domaine skiable.

Affirmation B : Si cette prévision se répétait 100 jours, alors il neigerait environ 80 jours sur 100.

Affirmation C : Durant la journée de demain, il va neiger environ 80 % du temps.

15 QCM

a. On a lancé 10 fois une pièce de monnaie.
Elle n'est jamais tombée sur PILE, donc...

R.1	R.2	R.3
la pièce est sans doute truquée	la pièce n'est sans doute pas truquée	on ne peut rien affirmer

b. On a lancé 600 fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6.
Il n'est jamais tombé sur le 6, donc...

R.1	R.2	R.3
le dé est sans doute truqué	le dé n'est sans doute pas truqué	on ne peut rien affirmer

c. Le slogan publicitaire d'un jeu de grattage est : « *En grattant une carte, on a 4 chances sur 5 de gagner !* ». Chaque carte est vendue 2,50 €.
Si j'achète 10 de ces cartes, alors...

R.1	R.2	R.3
je vais gagner au moins une fois	je vais gagner 8 fois	je vais dépenser 25 €

16 Sur sa clé USB, Mélodie a stocké un grand nombre de titres musicaux. En voici la répartition par genre.

Dance	Rap	R&B	Rock	Autres
55	25	45	60	35

a. Quand elle lance la lecture, l'appareil joue tous les titres en mode aléatoire. Quelle est la probabilité que le premier titre joué soit un titre de Dance ?

b. Mélodie répète 200 fois cette expérience aléatoire. Donne, en expliquant, un ordre de grandeur du nombre de fois où l'écoute débute par un morceau de Dance.

17 Lors d'un jeu télévisé, le candidat est finaliste et doit subir deux ultimes épreuves.

- **Première épreuve :** il est face à 5 portes. Une seule ouvre la **salle du trésor** ; les 4 autres donnent sur la **salle de consolation**.

- **Seconde épreuve :** une fois entré, le candidat doit choisir parmi 8 enveloppes.

  Voici ce qu'elles contiennent :

  • Dans la **salle du trésor** : 1 enveloppe de 1 000 €, 5 de 200 € et les autres de 100 €.

  • Dans la **salle de consolation** : 5 enveloppes de 100 € et les autres sont vides.

a. Quelle est la probabilité que le candidat accède à la salle du trésor ?

b. Si le candidat atteint la salle du trésor, quelle est la probabilité qu'il gagne au moins 200 € ?

c. Si le candidat atteint la salle de consolation, quelle est la probabilité qu'il ne gagne rien ?

18 Un dé cubique, à six faces numérotées de 1 à 6, est truqué : en le lançant, on a une chance sur deux de tomber sur le 6. Les autres faces sont équiprobables.

a. Quelle est la probabilité que le dé tombe sur une face avec un nombre pair ? Explique ta réponse.

b. Un jeu consiste à lancer ce dé : s'il tombe sur une face portant un nombre pair, on perd 1 €. Sinon, on gagne 2 €. A-t-on intérêt à jouer à ce jeu ? Argumente ta réponse.

19 Vrai ou Faux

P.1. Une urne **A** contient 35 boules rouges et 65 boules blanches, tandis qu'une urne **B** contient 19 boules rouges et 31 boules blanches. On a plus de chances d'obtenir une boule rouge en piochant une boule au hasard dans l'urne **B**.

P.2. Une urne **A** contient 90 boules rouges et 10 boules blanches, tandis qu'une urne **B** contient 10 boules rouges. On a plus de chances d'obtenir une boule rouge en piochant une boule au hasard dans l'urne **A**.

P.3. Si on répond au hasard à deux questions de type *Vrai* ou *Faux*, alors on a une chance sur deux d'avoir trouvé les deux bonnes réponses.

20 On place des jetons indiscernables au toucher dans un sac. Sur chaque jeton coloré est inscrite une lettre : A ou B. La répartition des jetons est donnée dans le tableau suivant.

	Rouge	Vert	Bleu
A	3	5	2
B	2	2	6

a. Combien y a-t-il de jetons ?

On pioche un jeton au hasard.
Dans ce qui suit, donne chaque probabilité sous forme d'une fraction simplifiée, puis sous forme d'un pourcentage.

b. Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton bleu portant la lettre A ?

c. Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge ?

21 ***Aléatoire dans le nombre pi...***

On s'intéresse à l'écriture décimale du nombre π. Elle comporte une infinité de chiffres, et il semble que les différents chiffres sont distribués de façon aléatoire...

a. En observant l'écran de calculatrice ci-dessus, recopie et complète le tableau suivant en y indiquant la fréquence d'apparition de chaque chiffre parmi les 10 premiers de l'écriture décimale de π.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Que remarques-tu ?

b. Le tableau suivant donne la fréquence d'apparition (en %) de chaque chiffre parmi les 50 premiers de l'écriture décimale de π.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	8	10	18	8	10	8	8	10	16

Que remarques-tu ?

c. Voici enfin le tableau analogue, concernant le premier million de chiffres de l'écriture décimale de π. (Les fréquences sont données en %, arrondies à l'unité.)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Que remarques-tu ?

Est-ce bien équitable ?...

Mario et son petit frère Luigi décident de jouer aux dés : ils disposent d'un dé classique à six faces, numérotées de 1 à 6, et d'un autre, à huit faces, numérotées de 1 à 8.
Les dés sont équilibrés.

Mario a fixé les règles du jeu : on lance les deux dés. La somme des nombres indiqués sur chaque dé décide du gagnant : Mario gagne lorsque cette somme est comprise entre 7 et 11 (7 et 11 inclus), et Luigi gagne dans tous les autres cas.

a. Quelles sont toutes les sommes que l'on peut obtenir lors d'une partie ? Combien d'entre elles font gagner Mario ? Ce jeu te semble-t-il équitable ? Explique ta réponse.

TICE Tableur

Tu vas simuler 1 000 parties de ce jeu à l'aide d'un tableur.

	A	B	C
1	Dé à 6 faces	Dé à 8 faces	Somme obtenue
2			

En A2, saisis la formule =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6) . Sélectionne les cellules allant de A2 à A1001 (utilise la *Zone de nom*), puis copie la formule dans cette plage.

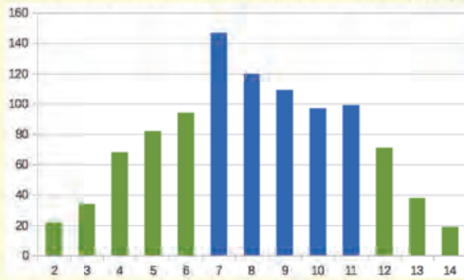
b. Quelle formule peux-tu saisir en B2, puis recopier vers le bas, pour simuler le lancer du dé octaédrique ? Complète ainsi la colonne B.

c. Quelle formule peux-tu saisir en C2, puis recopier vers le bas, pour déterminer la somme obtenue ? Complète ainsi la colonne C.

d. Dans la colonne E, place les issues de l'expérience, c'est-à-dire les différentes sommes possibles. Dans la colonne F, détermine les effectifs correspondants. Utilise pour cela la fonction NB.SI du tableur, qui permet de compter le nombre de cellules contenant un certain nombre, parmi une plage de cellules donnée.

E	F
Issue	Effectif

=NB.SI(C$2:C$1001;E2)



e. Les différentes sommes te semblent-elles équiprobables ? Comment expliques-tu que certaines apparaissent plus rarement ?

f. Représente graphiquement la distribution des différentes sommes possibles.

Demande ensuite au logiciel de simuler 1 000 nouvelles parties.
L'allure du graphique change-t-elle ?

g. Complète ta feuille de calcul afin de compter le nombre de victoires de chaque garçon, au cours de ces 1 000 parties, ainsi que les fréquences de victoires correspondantes. Quelles formules as-tu saisies en I2 et J2 ? Et en I3 et J3 ? Formate les cellules I3 et J3 au format *Pourcentage*.

H	I	J
	Mario	Luigi
Nombre de victoires		
Fréquence de victoires		

Les règles du jeu avantagent-elles l'un des deux frères ?

h. Construis un tableau à double entrée permettant de visualiser toutes les issues possibles. Déduis-en la probabilité que Mario gagne la partie.

i. La probabilité trouvée à la question précédente est-elle égale au contenu de la cellule I3 ? Explique pourquoi.

A1

Algorithmique et programmation

Exercices

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Pour déterminer si un nombre N est divisible par 11, on applique l'algorithme suivant :

- `On calcule la somme A des chiffres en position impaire ;`
- `on calcule la somme B des chiffres en position paire ;`
- `on calcule la différence D entre ces deux entiers ;`
- **`si`** `D est divisible par 11,` **`alors`** `N est divisible par 11 ;`
- **`sinon`** `N n'est pas divisible par 11.`

Les entiers suivants sont-ils divisibles par 11 ?

a. 55 **b.** 121 **c.** 2 749 **d.** 52 635 **e.** 112 233 445 566 778 899

2 Une fraction égyptienne est une fraction qui a pour numérateur 1. Une fraction peut être décomposée en somme de fractions égyptiennes ; par exemple : 4/5 = 1/2 + 1/5 + 1/10.

Une fraction F inférieure à 1 peut être décomposée de cette manière en appliquant l'algorithme :

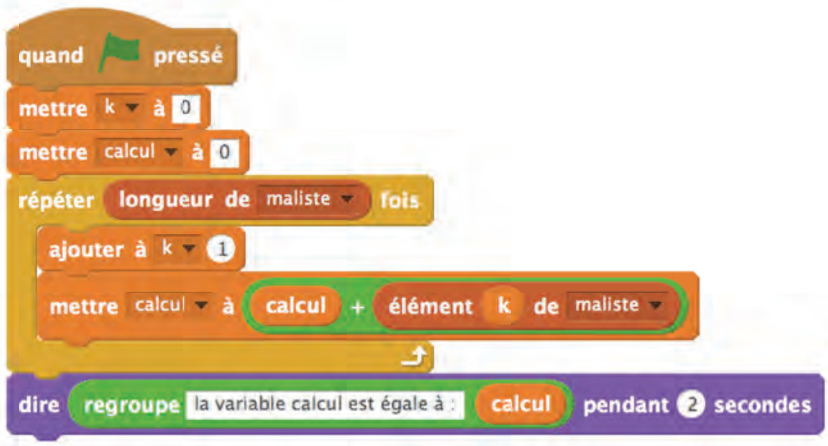
- `Inverser la fraction F, on obtient la fraction G ;`
- `Prendre l'entier N immédiatement supérieur à la fraction G ;`
- `Calculer, à l'aide de la calculatrice, la différence entre F et 1/N ;`
- `On s'arrête si la fraction obtenue a pour numérateur 1. Sinon on recommence à la première étape avec la fraction obtenue.`

Retrouve la décomposition de 4/5 puis décompose 77/111.

3 Que fait le programme SCRATCH ci-contre ?

a. Détaille les étapes dans le cas où **maliste** contient les nombres : 15, 11 et 20.

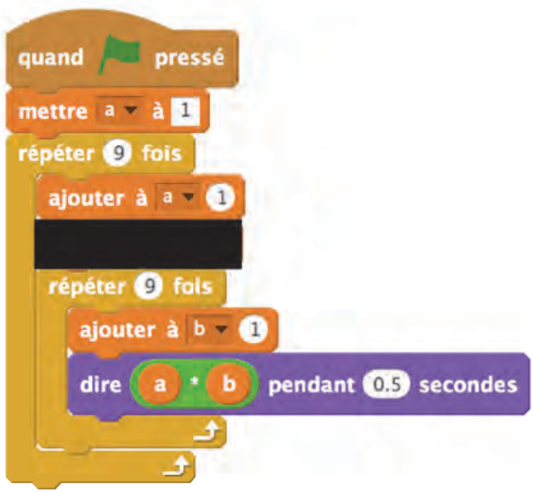
b. Comment modifier le programme pour calculer la somme des carrés des nombres d'une liste ?



4 Une instruction a été masquée. Peux-tu quand même deviner ce que fait ce programme ?

a. Détaille les étapes.

b. Quelle est l'instruction manquante ? Explique ta démarche.



1 Du codage de César au Carré de Vigenère

Dans les méthodes de cryptographie que tu vas découvrir, chacune des lettres d'un mot est remplacée par une autre lettre à l'aide de ce que l'on appelle une « clé de chiffrement ». Le mot mathématiques peut ainsi être transformé en podjushapfiej.

Pour décrypter le message (on dit aussi le « déchiffrer »), le destinataire doit savoir quelle méthode et quelle clé l'expéditeur a utilisées (une même clé de chiffrement sert à chiffrer et à déchiffrer un message).

a Dans le **codage de César**, la clé de chiffrement comporte une seule lettre.

Exemple : Avec la clé de chiffrement **D** → A devient D, B devient E, et ainsi de suite.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Essaie de coder le mot mathématiques (pour t'aider : M est codé P).

b Lors d'un jeu de piste, tu as intercepté ce message destiné à l'équipe adverse :

unb anwoxacb jaarenwc

Tu sais que l'expéditeur a utilisé un codage de César mais tu ignores la clé de chiffrement. Essaie de le déchiffrer !

Indice : Au lieu de procéder au hasard, regarde bien les mots, en particulier le premier.

c Avec de la patience, on constate qu'il est relativement facile de déchiffrer un message.

Alors, pour éviter qu'un texte soit décrypté par n'importe quel intrus, Blaise de Vigenère a compliqué le déchiffrement :

- Il a construit le **carré de Vigenère** (voir page suivante).
- Et il a proposé un système de chiffrement dans lequel la clé n'est plus une seule lettre, mais un mot : on code chaque lettre du message en utilisant successivement les lettres de la clé.

Exemple :
On choisit la clé **ROI** pour chiffrer le message suivant : arrivons demain.
On s'aide du tableau suivant :

A	R	R	I	V	O	N	S		D	E	M	A	I	N
R	**O**	**I**	**R**	**O**	**I**	**R**	**O**		**I**	**R**	**O**	**I**	**R**	**O**
R	F	Z	Z											

Achève de chiffrer le message.

d Le message ci-dessous a été chiffré à l'aide de la méthode de Vigenère ; la clé est **CIEL**.

XQZPNMWXCBLD

Peux-tu décrypter ce message ?

Point info

Les méthodes de chiffrement et de déchiffrement utilisent des algorithmes assez simples. Pourtant le déchiffrement des messages est une opération très difficile :

- Elle est quasiment insoluble si on ne connait pas l'algorithme de chiffrement utilisé.

- Et, même quand on le connait, il faut savoir quelle clé a été utilisée !

Les méthodes actuelles de chiffrage n'utilisent plus le carré de Vigenère. Elles sont basées sur le **chiffrage RSA** : cette fois encore, c'est le fait de ne pas connaitre la clé qui empêche le déchiffrement !

Blaise de Vigenère

Carré de Vigenère

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

2 Écriture binaire d'un nombre

Pour comprendre l'écriture d'un nombre en base 2 (appelée écriture binaire), revenons sur son écriture en base 10 (appelée écriture décimale). Par exemple, le nombre 205 108 s'écrit :

$205\,108 = \mathbf{2} \times 100000 + \mathbf{0} \times 10000 + \mathbf{5} \times 1000 + \mathbf{1} \times 100 + \mathbf{0} \times 10 + \mathbf{8}$

C'est-à-dire : $\mathbf{2} \times 10^5 + \mathbf{0} \times 10^4 + \mathbf{5} \times 10^3 + \mathbf{1} \times 10^2 + \mathbf{0} \times 10^1 + \mathbf{8} \times 10^0$

Les chiffres de ce nombre s'obtiennent en l'écrivant sous la forme d'une somme de termes de la forme $a \times 10^k$ avec $a < 10$.

Pour écrire un nombre en base 2, il faut le décomposer en une somme de termes de la forme $a \times 2^k$ avec $a < 2$, c'est-à-dire avec a qui est égal à 0 ou 1.

Par exemple : $197 = \mathbf{1} \times 2^7 + \mathbf{1} \times 2^6 + \mathbf{0} \times 2^5 + \mathbf{0} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{1}$

L'écriture binaire de l'entier 197 est donc 11000101.

a Donne l'écriture décimale des nombres binaires suivants : 101, 1000 et 10101011.
Peux-tu donner une méthode générale, sous forme d'un algorithme, pour obtenir l'écriture décimale d'un nombre à partir de son écriture binaire ?

b Donne l'écriture binaire des nombres entiers suivants : 25, 64, 255 et 1024.
Peux-tu donner une méthode générale, sous forme d'un algorithme, pour obtenir l'écriture binaire d'un nombre à partir de son écriture décimale ?

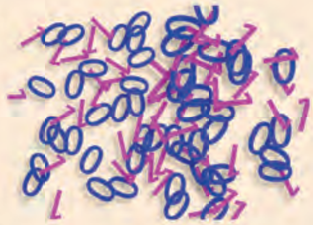
Point info

De nos jours, nous calculons en base 10 mais cela n'a pas toujours été le cas.

Par exemple, les Sumériens calculaient en base 60. Cette base est encore utilisée aujourd'hui dans le système horaire (minutes et secondes).

Les Mayas, eux, utilisaient la base 20.

L'ordinateur utilise la base 2, c'est-à-dire le **codage binaire**. Le chiffre 1 est représenté par un signal électrique, tandis que le chiffre 0 est représenté par l'absence de signal électrique, ou une valeur trop faible.



3 Octets et codage RVB

a Dans un ordinateur, l'unité de stockage est l'octet. Un octet contient 8 bits, chacun valant soit 0 soit 1 (bit : contraction de *BInary digiT*, chiffre binaire).

Voici quelques exemples d'octets : 01011011, 10110000 et 00001000.
Chaque octet représente un nombre en base 2.

- Quels nombres en base 10 sont égaux aux trois octets cités ci-dessus ?
- Combien un octet peut-il prendre de valeurs différentes ?

b Dans les années 90, un ordinateur avec écran VGA proposait des couleurs codées à l'aide d'un octet. Combien de couleurs différentes proposait un tel ordinateur ? Est-ce suffisant pour afficher correctement une photo ?

c Dans le codage RVB (Rouge-Vert-Bleu), une couleur est codée à l'aide de trois octets.

- En anglais, ce codage est appelé codage RGB. Sais-tu pourquoi ?

Chacun de ces octets indique la quantité de couleur correspondante, sachant que 0 correspond au minimum de couleur, et 255 à son maximum. Exemple :

En base 2	00011110 – 01111111 – 11001011
En base 10	30 – 127 – 203
En toutes lettres	peu de rouge, un peu de vert et beaucoup de bleu
En couleurs	Je suis la couleur Azur !

- Quelle est la couleur 255 – 255 – 255 ? La couleur 0 – 0 – 0 ? La couleur 255 – 0 – 255 ?
- Quelle est la différence entre la couleur codée 255 – 0 – 255 et la couleur codée 100 – 0 – 100 ?
- Dans le codage RVB, combien y a-t-il de couleurs différentes possibles ?

d L’œil humain ne distingue que 350 000 teintes de couleurs différentes. Le système RVB te semble-t-il optimal ?

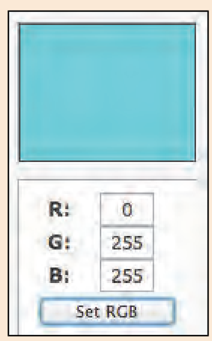
Point info

D'autres modèles existent pour la représentation des couleurs.

Par exemple, le **modèle TSL** qui décompose une couleur selon les trois paramètres suivants :

- la Teinte (chemise rouge ou mauve) ;
- la Saturation, qui permet de déterminer la pureté de la couleur (chemise délavée ou neuve) ;
- la Lumière (chemise en plein soleil ou à l'ombre).

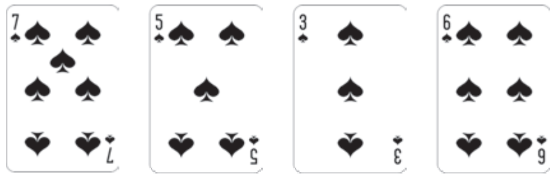
Ce modèle est plus adapté à la physiologie de notre œil et facilite le choix des couleurs par rapport au modèle RVB.



4 Tri par insertion

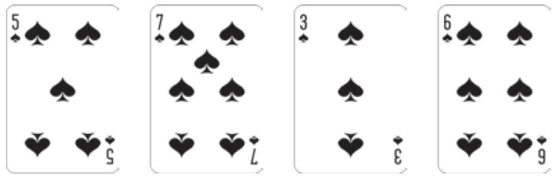
Le tri par insertion est la méthode qu'utilisent habituellement les joueurs de cartes.

Considérons une liste désordonnée de cartes :

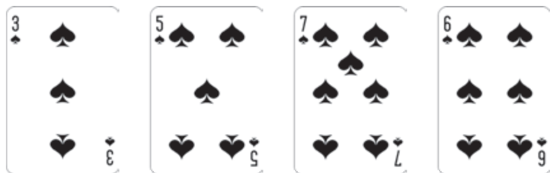


Pour ranger ces cartes dans l'ordre croissant, le joueur va d'abord trier les deux premières cartes, puis insérer la troisième à la bonne place, et ainsi de suite.

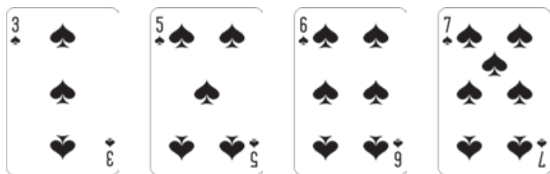
On trie les deux premières cartes :



Ensuite, on range la troisième carte :



Enfin, la dernière carte vient s'insérer entre le 5 et le 7 de pique :



a Applique cet algorithme pour ranger les listes A et B ci-dessous dans l'ordre croissant. Décris les étapes intermédiaires quand il y a un changement :

- Liste A : 52 | 15 | 47 | 25
- Liste B : 14 | 11 | 7 | 13 | 12 | 9 | 10

b Cette fois, l'algorithme est appliqué à cette liste de nombres :

15 | 25 | 45 | 52 | 55 | 46 | 59

Mais c'est un ordinateur qui fait le travail ! Il a déjà rangé les cinq premiers nombres et s'apprête à insérer le nombre 46. Comment fait-il concrètement pour insérer ce nombre entre 45 et 52 ?

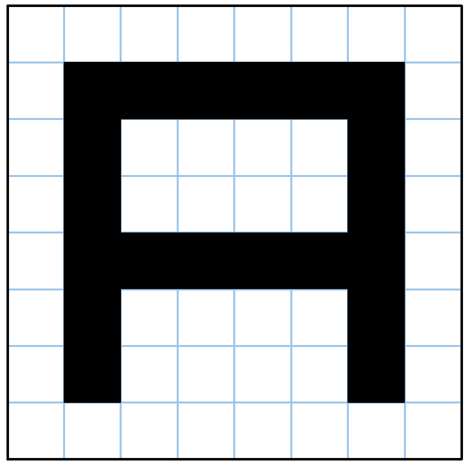
Point info

L'algorithme utilisé ici, appelé **tri par insertion**, est moins efficace que d'autres algorithmes de tri, comme le **tri fusion** ou le **tri rapide**.
Malgré tout, il est encore utilisé dans certaines situations car, quand la liste de nombres est presque rangée, c'est lui qui trie le mieux !

L'efficacité des algorithmes dépend également du matériel utilisé. Un tri efficace sur un gros ordinateur peut devenir inefficace sur un ordinateur personnel, si ce dernier n'a pas la mémoire vive suffisante pour stocker la liste des données à trier !

Le tri des données est d'une importance capitale pour l'accès rapide à l'information. Imagine un dictionnaire dont les mots seraient écrits dans le désordre !

5 Codage d'une image



On dispose d'une image vide comportant 64 cases.
Chaque case peut être blanche ou noire.

Ci-contre, voici un exemple d'image :
Elle est codée comme ceci :

```
00000000
01111110
01000010
01000010
01111110
01000010
01000010
00000000
```

a Explique le codage.

b Chaque ligne du codage est considérée comme un nombre écrit en base 2.
Ainsi, la ligne 1, notée 00000000, correspond au nombre 0 ; la ligne 2, notée 01111110, correspond au nombre 126. On décide de remplacer chaque ligne par le nombre correspondant écrit en base 10. On obtient donc : 0 – 126 – ??? – ??? – ??? – ??? – ??? – ???.

Complète avec les nombres manquants.

c Dessine une figure en noircissant quelques cases et code-la avec des nombres décimaux. Donne le codage à ton voisin qui redessinera ta figure !

Point info

Quelle que soit la nature des données, elles sont stockées dans un ordinateur sous la forme d'immenses suites contenant des 0 et des 1. Chaque suite représente un nombre écrit en base 2. Avec tous ces nombres, on peut stocker des caractères, donc des mots, et donc des livres. Mais on stocke aussi des images, des sons... bref, tout ce qui s'affiche à l'écran.

6 Numéro INSEE : appliquer un algorithme

Le numéro INSEE, encore appelé le numéro de sécurité sociale, est attribué en France à tout individu à la naissance. Il comporte 15 chiffres dont les 13 premiers constituent ce qu'on appelle le numéro NIR (Numéro d'Inscription au Répertoire) :

- le premier chiffre est égal à 1 ou 2 :
  1 pour un garçon et 2 pour une fille ;
- le deux chiffres suivants donnent l'année de naissance ;
- les deux chiffres suivants donnent le mois de naissance (03 pour le mois de mars par exemple) ;
- les deux chiffres suivants donnent le département de naissance ;
- les trois chiffres suivants représentent la commune de naissance ;
- les trois chiffres suivants constituent le numéro d'ordre ;
- les deux derniers chiffres donnent la clé de contrôle.

a Quel est le numéro NIR d'Aurélie, qui est née à Marseille le 21 octobre 2003, et qui a pour numéro d'ordre 158 ? Marseille (055) est dans le département des Bouches-du-Rhône (13).

b Pour déterminer la clé de contrôle du NIR, on applique l'algorithme suivant :

- `On considère le nombre entier constitué des chiffres du numéro NIR.`
- `On calcule le reste de la division euclidienne de cet entier par 97.`
- `On soustrait ce reste à 97. Le nombre ainsi obtenu est la clé de contrôle.`

Détermine la clé puis donne le numéro d'INSEE d'Aurélie.

c À ton avis, pourquoi utilise-t-on ce genre de clés ?

d Plus généralement, pourquoi le numéro INSEE est-il utile ?

e Pour la première fois, en 1991, s'est posé un problème étrange. Dans une commune, vivaient des personnes très âgées. À ton avis, quel était ce problème et comment a-t-on procédé pour le résoudre ?

Point info

Certains systèmes peuvent être ébranlés par des problèmes qui n'étaient pas prévus au départ. Cela peut déclencher des erreurs plus ou moins graves ; en informatique, on les appelle des bugs (ou bogues).

Par exemple, le célèbre bug de l'an 2000. À la fin du siècle dernier, une année était représentée dans les ordinateurs par ses deux derniers chiffres, et non par ses quatre chiffres comme aujourd'hui. Les années 2000 et 1900 étaient donc codées de la même manière. Cela a engendré certains dysfonctionnements mais aucune erreur critique. En effet, de nombreux travaux sur les systèmes avaient été effectués en prévention, travaux dont le cout a d'ailleurs été évalué en centaines de milliards de dollars.

7 Nombre mystère

Tu dois deviner le nombre mystère, un nombre entier compris entre 1 et 100.
À chaque étape, tu proposes un nombre et on te dit si le nombre mystère est plus grand ou plus petit que celui que tu as proposé. Tu disposes d'autant d'étapes que nécessaire, mais le but est de trouver le nombre mystère le plus rapidement possible.

a Voici deux algorithmes :

```
A1 : Je propose un nombre au hasard entre 1 et 100.
     Si ce n'est pas le nombre cherché, j'en propose un autre au hasard
     parmi les nombres que je n'ai pas encore proposés.

A2 : Je propose le nombre 1.
     Si ce n'est pas le nombre mystère, je propose le nombre 2.
     Et ainsi de suite.
```

- Pour chaque algorithme, de combien d'étapes as-tu besoin au maximum pour trouver le nombre ?
- Pourquoi ces algorithmes sont-ils « stupides » ?
- En moyenne, combien d'étapes chaque algorithme nécessite-t-il pour trouver le nombre ?

b Propose un algorithme pour trouver le nombre mystère et teste-le auprès de ton voisin.
Fais plusieurs simulations et note à chaque fois le nombre d'étapes nécessaires. Calcule le nombre moyen d'étapes nécessaires. Plus cette moyenne est faible, plus ton algorithme est efficace !

c Pour trouver le nombre mystère, il existe un algorithme particulièrement performant qui nécessite en moyenne 5,8 étapes. Il s'agit d'un algorithme de **dichotomie** (état de ce qui est coupé en deux).
À ton avis, quel est cet algorithme ?
Avec ce programme, est-il possible de trouver le nombre mystère en 8 étapes ou plus ?
Propose un nombre mystère nécessitant 2 étapes, puis un nombre mystère nécessitant 7 étapes.

Point info

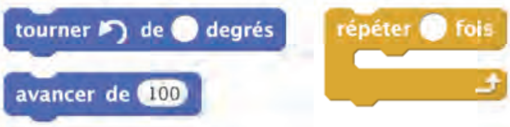
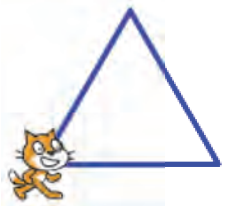
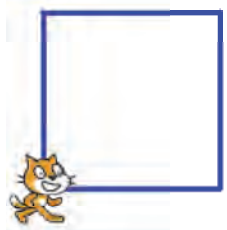
Comme pour les algorithmes de tri, un algorithme donné est plus ou moins efficace selon les données initiales. Par exemple, l'algorithme trivial (A1) est particulièrement efficace quand le nombre mystère est 1, et est donc plus performant que l'algorithme de dichotomie !

Cet exemple montre que c'est le nombre **moyen** d'étapes nécessaires pour résoudre le problème qui est important car un algorithme peut se révéler très efficace tout simplement par chance.

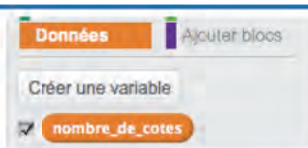
8 Logo et polygones réguliers

Dans cette activité, tu vas programmer SCRATCH *afin qu'il dessine des polygones réguliers : d'abord quelques cas particuliers, comme le triangle équilatéral et le carré, puis des polygones réguliers avec un nombre quelconque de côtés.*

Première partie

Crée le code ci-contre. **Remarque :** Au départ, la scène est vide. Mais, quand tu relanceras le programme, elle contiendra une figure. Il faudra donc l'effacer avant de recommencer une figure.	
Utilise les blocs ci-dessous pour construire un triangle équilatéral. 	
Modifie ton programme afin de dessiner un carré.	

Deuxième partie

Crée une variable **nombre_de_cotes**.	
Crée le code ci-contre.	

Par défaut, cette variable est égale à 0 mais quand le programme est exécuté, le lutin demande le nombre de côtés du polygone régulier. La variable **nombre-de-cotes** prend alors la valeur que tu saisis dans la zone de saisie.

Remarque :
Cette valeur est stockée dans une variable spéciale appelée **réponse**. Au lancement du programme, **nombre_de_cotes** est initialisé avec cette valeur.

Modifie le programme de la première partie afin que le lutin dessine le polygone régulier.

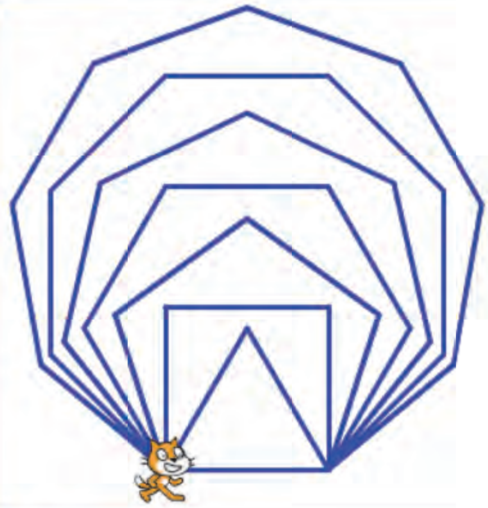
Pour cela, utilise les briques suivantes : nombre_de_cotes et ( ) / ( ).

Indication :

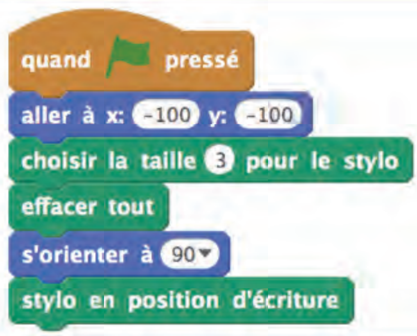
Si le polygone comporte 3 côtés, de combien de degrés le lutin doit-il tourner à chaque étape ? Même question pour 4 côtés, et pour 6 côtés.
Plus généralement, si le polygone comporte n côtés, de combien de degrés doit-il tourner ?

Troisième partie (pour aller plus loin)

Dans cette partie, le lutin ne demande plus le nombre de côtés. Il va construire directement des polygones réguliers à 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 côtés.



Reprends le code de la première partie.



Crée une variable **nombre_de_cotes** et initialise-la à 3.

Remarque :

Contrairement à la partie précédente, cette variable doit valoir 3 au départ (afin de construire le triangle équilatéral) puis 4, 5 … jusque 9.

Modifie le programme de la deuxième partie comme suit :

- **Insère** le bloc qui construit le polygone régulier dans un bloc *répéter* (catégorie **Données**) et saisis « 7 » pour répéter 7 fois.
- Le programme ne fonctionne pas encore car la variable **nombre_de_cotes** est toujours égale à 3. Il faut qu'elle augmente de 1 à chaque répétition. Quelle instruction faut-il ajouter dans cette boucle *répéter* ?

Point info

Dans les langages de programmation, les variables sont fondamentales.

Ici, la variable **nombre_de_cotes** a permis de construire un, puis des polygones réguliers, dont le nombre de côtés était égal à cette variable.

Soit une variable **k** définie dans SCRATCH. L'instruction `mettre k à 0` (catégorie **Données**) permet de lui affecter une valeur. Cette valeur peut d'ailleurs être une expression complexe contenant d'autres variables. Par exemple : `mettre k à (a + b)`, où la somme des variables **a** et **b** est affectée à la variable **k**.

9 Listes et minimum d'une liste

SCRATCH va te permettre de déterminer le minimum d'une liste de nombres. Dans les deux premières parties, tu vas apprendre ce qu'est une liste et comment on travaille avec elle.

Première partie

Crée une liste appelée **maliste** (catégorie **Données**). Cette liste s'affiche à l'écran, elle est vide pour l'instant.

Complète la liste manuellement avec les nombres indiqués ci-contre.

Pour cela, clique sur le + (en bas à gauche de la liste) ou appuie sur la touche ENTREE.

Pour comprendre comment travailler avec cette nouvelle liste, crée le programme ci-contre.

Remarque :
Les instructions de couleur violette sont dans la catégorie **Apparence**.

Ajoute des instructions afin d'obtenir la liste suivante : 50, 9, 20 et 17.

Activités

Point info

Les listes de Scratch sont l'équivalent des *Tableaux* en programmation. Ce sont des **variables** complexes (de type *Array* : tableau en anglais) à plusieurs cases, chacune pouvant contenir un nombre ou un texte.

Dans Scratch, si tu cliques sur la liste à l'aide du bouton droit, tu peux importer un fichier texte provenant de ton ordinateur.

Deuxième partie

Crée un nouveau projet avec une liste qu'on nommera **maliste**.
Puis crée le programme ci-contre.

Que fait exactement ce programme ?

On souhaite maintenant que **maliste** contienne les entiers de 1 à 10.

Pour cela, crée une variable **k**.
Initialise **k** à 1.

Crée le code ci-contre et complète-le.

Modifie ce programme pour construire une liste avec les carrés des 20 premiers entiers.

Troisième partie

Dans cette partie, le programme demande la longueur de la liste, puis la valeur des différents éléments de la liste. Il annonce enfin le ***minimum*** *de la liste.*

Crée un nouveau projet avec une liste qu'on nommera **maliste**.

Crée une variable **longueur**.

Crée une instruction *demander* afin de stocker la longueur de la liste dans la variable **longueur**.

Utilise et complète les instructions ci-contre afin de remplir progressivement la liste avec les valeurs saisies.

Scratch doit trouver maintenant le minimum de la liste saisie précédemment.
Crée une variable appelée **minimum**.

Initialise cette variable à 100 000 :  .

Crée une variable **k** et initialise cette variable à 1.

Crée et complète ensuite le programme suivant :

```
mettre minimum à 100000
mettre k à 1
répéter [redacted] fois
    si élément k de maliste < minimum alors
        mettre minimum à [redacted]
    [redacted]
dire regroupe Le minimum de la liste est : minimum pendant 2 secondes
```

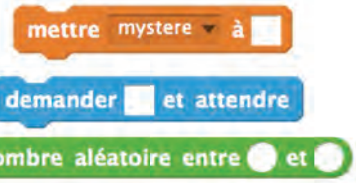
Modifie ce programme afin qu'il donne le maximum de la liste.

10 Le nombre mystère

*Dans l'***activité 7***, il fallait retrouver un nombre entier compris en 1 et 100.*

Dans cette activité-ci, c'est SCRATCH*, à travers le chat, qui va choisir un nombre et répondre à tes propositions.*

Crée un nouveau projet avec :
- une variable **mystere**, initialisée à un nombre aléatoire compris entre 1 et 100.
- une variable **nbetapes** (nombre d'étapes).



Pose une première fois la question : *"Quelle est ta proposition ?"*

On souhaite que SCRATCH réponde par une des deux phrases et demande que tu proposes un nouveau nombre, si ta proposition est fausse.
Cela doit se reproduire jusqu'à ce que ta proposition soit le nombre mystère.

Pour créer le programme correspondant, utilise et complète les briques ci-contre.

On souhaite maintenant que SCRATCH dise combien d'étapes ont été nécessaires pour trouver le nombre mystère : regroupe Bravo, tu as trouvé en regroupe nbetapes étapes ! .

- Crée une variable **nbetapes** et initialise cette variable à 1.
- Insère dans le bloc précédent l'instruction ajouter à nbetapes 1 incrémentant de 1 la variable **nbetapes**.
- Si **nbetapes** est supérieur ou égal à 8, SCRATCH signale au joueur qu'il aurait pu trouver plus rapidement à l'aide de l'instruction

.
- Crée le code correspondant.

11 Jets d'un dé

L'objectif de cette activité est de simuler des lancers de dé avec SCRATCH, et d'afficher le nombre de fois où chaque face (1, 2, 3, 4, 5 ou 6) est apparue.

Indications :
- Pour générer un nombre entier aléatoire entre 1 et 6, on utilise l'expression : nombre aléatoire entre 1 et 6.
- Supposons qu'à un moment donné, le tableau des effectifs soit celui-ci :

Face obtenue	1	2	3	4	5	6
Effectif	12	10	9	14	11	8

Remarque :
Dans SCRATCH, le tableau est représenté à l'aide d'une **liste** nommée "**effectifs**" (voir **activité 9**).

SCRATCH simule alors un nouveau lancer de dé et obtient 1.
Il faut alors écrire 13 à la place de 12. L'instruction suivante permet de le faire :

`remplacer l'élément 1 de la liste effectifs par élément 1 de effectifs + 1`

Si on obtient un 3, alors on ajoute 1 à la troisième case du tableau d'effectifs.
Si on obtient un 2, alors on ajoute 1 à la deuxième case du tableau d'effectifs.

Crée une liste appelée **effectifs**. Vide la liste et remplis-la de six 0 en utilisant les instructions ci-contre. →	supprimer l'élément tout de la liste effectifs répéter ( ) fois ajouter [ ] à effectifs
Crée une variable **jet** (qui simule le résultat d'un lancer). Crée la partie du programme modifiant la cellule correspondante du tableau. →	mettre jet à nombre aléatoire entre 1 et 6
À ce stade, ton programme simule un seul lancer. Pour simuler 1 000 lancers, utilise l'instruction de contrôle *répéter* et complète le code précédent. →	répéter 1000 fois
Complète ensuite le code de manière à ce que ce soit l'utilisateur qui décide du nombre de fois où le dé doit être lancé. →	demander Combien de lancers de dés ? et attendre répéter réponse fois

a Exécute ton programme avec 10 000 lancers, 100 000 lancers, 1 000 000 lancers (pense au mode turbo, voir **Point info**).

b Recopie sur ton cahier le tableau d'effectifs obtenu pour 1 000 000 de lancers, et ajoute une ligne contenant les fréquences.

c Quelle est la probabilité théorique d'obtenir un chiffre particulier ?

d Peux-tu faire le lien avec cette activité ?

Point info

Dans le menu **Édition** de SCRATCH, il existe un mode **turbo**. Quand ce mode est coché, le programme est exécuté le plus rapidement possible. Cette option est très utile quand on souhaite simuler 1 000 000 de lancers.

Projet 1 : Dans l'aquarium

Nous allons programmer un petit jeu : un requin et un poisson nagent dans un aquarium.

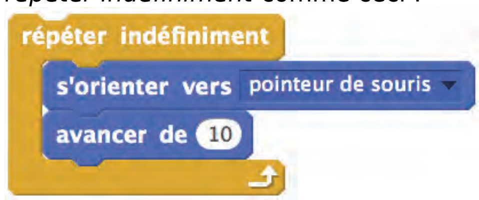
Durant une minute (ou plus !), le requin se promène aléatoirement et le poisson, que tu diriges, cherche à l'éviter.

Au début du jeu, tu possèdes dix points. À chaque contact, tu perds un point et les deux lascars reprennent leur position initiale.

Pour déplacer le poisson, tu as deux possibilités :

- Tu utilises le clavier et les évènements suivants :

- Tu utilises l'instruction de **Contrôle** *répéter indéfiniment* comme ceci :



Pour programmer le déplacement aléatoire du requin, utilise le code ci-dessous.
Attention : le lutin *Requin* doit être sélectionné !

Pour programmer les collisions, utilise pour chaque lutin le bloc ci-dessous.

Attention : ce bloc est destiné au lutin requin. *Fish3* est le poisson qui sera touché.

Le bloc destiné à *Fish3* aura bien sûr un autre attribut !

Pour programmer la variable chronomètre

La partie est gagnée si on a résisté 60 secondes, c'est-à-dire si le score est supérieur à 0, et si le **chronomètre** est supérieur à 60. La variable **chronomètre** est créée automatiquement par SCRATCH au lancement du programme. Utilise les instructions suivantes pour programmer le gain de la partie :

Indication : Essaie de placer ces instructions dans un bloc *répéter indéfiniment* et dans un *SI*.

Pour aller plus loin

- Tu peux paramétrer plusieurs niveaux de difficulté. Pour cela, insère une variable **difficulte** à la place de 10.
- Tu peux ajouter des requins !
- Tu peux accélérer la vitesse de déplacement du requin, au bout de 40 secondes par exemple. Pour cela, crée une variable **vitesse_requin** et utilise-la dans le code gérant son déplacement.

Projet 2 : Codages

Nous allons coder (chiffrer) un mot saisi au lancement du programme. Pour cela, nous reprendrons le codage de César (voir **activité 1***), puis découvrirons le codage affine.*

Partie 1 : Le codage de César

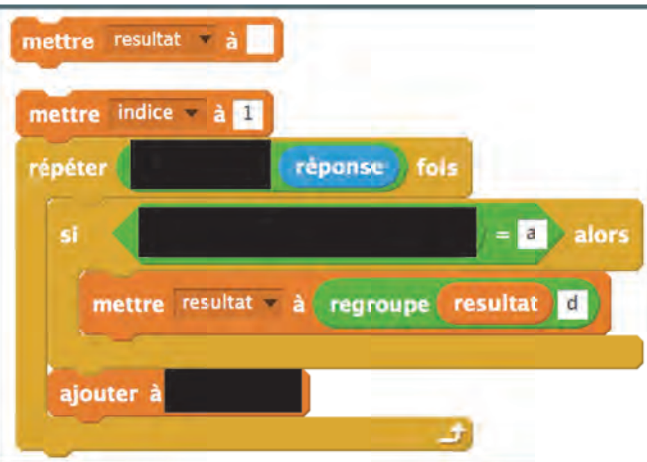
Ce type de codage consiste, si la clé est la lettre **D**, à remplacer A par D, B par E, etc.

Tu vas d'abord créer deux variables :

- une variable **resultat** qui contiendra le mot chiffré. Initialise cette variable à une chaine vide.
- une variable **indice** qui permet de coder le mot lettre par lettre.

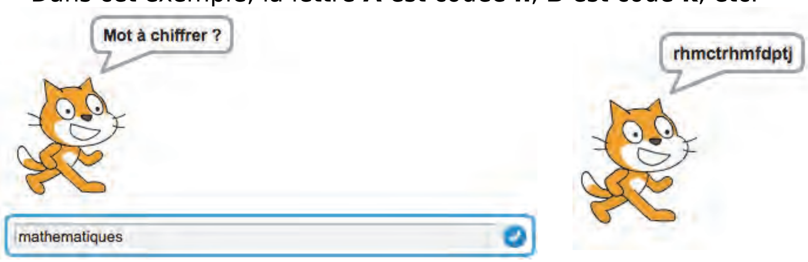
Exemple : Pour chiffrer le mot "maths"

L'expression `lettre indice de maths` donne accès à chaque lettre l'une après l'autre, la variable **indice** valant 1, puis 2... jusqu'à ce que les 5 lettres du mot aient été chiffrées.



Partie 2 : Un codage affine

Un autre type de chiffrage consiste à utiliser une **liste** de codage, telle que : **h k n q w ...**
Dans cet exemple, la lettre **A** est codée **h**, **B** est codé **k**, etc.



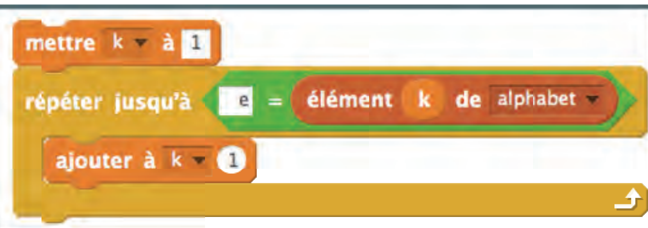
Dans un premier temps, tu vas créer :

- une liste **alphabet** (a, b, c, d, e...) ;
- ta propre liste de codage que l'on nommera **tablecodage**.

Dans un second temps, tu vas déterminer la position alphabétique de chaque lettre du mot à coder. Ainsi, pour chiffrer un **E**, on détermine d'abord que c'est la cinquième lettre de l'alphabet. Puis on remplace **E** par la cinquième lettre de la liste de codage. Dans l'exemple ci-dessus, il s'agit de **w**.

Pour rechercher la position d'une lettre dans la liste **alphabet**, utilise le bloc ci-contre.

La variable **k** sera égale à l'indice de la lettre **E** dans l'alphabet, c'est-à-dire 5.
Il te suffit ensuite d'afficher le 5e élément de la liste de codage.



Pour aller plus loin

- Tu peux chiffrer des phrases entières ou des lettres accentuées (é, è, à). Pour cela, il suffit de modifier légèrement le programme.
- Tu peux créer un programme permettant de **déchiffrer** un message codé.

Point info **Le codage affine**

La liste de codage citée en exemple a été créée à partir des clés 3 et 7 :

A a pour numéro 0 → On calcule $3 \times 0 + 7 = 7$ → A est donc remplacé par **h**.
B a pour numéro 1 → On calcule $3 \times 1 + 7 = 10$ → B est donc remplacé par **k**.
K a pour numéro 10 → On calcule $3 \times 10 + 7 = 37$ → K est donc remplacé par **l**.

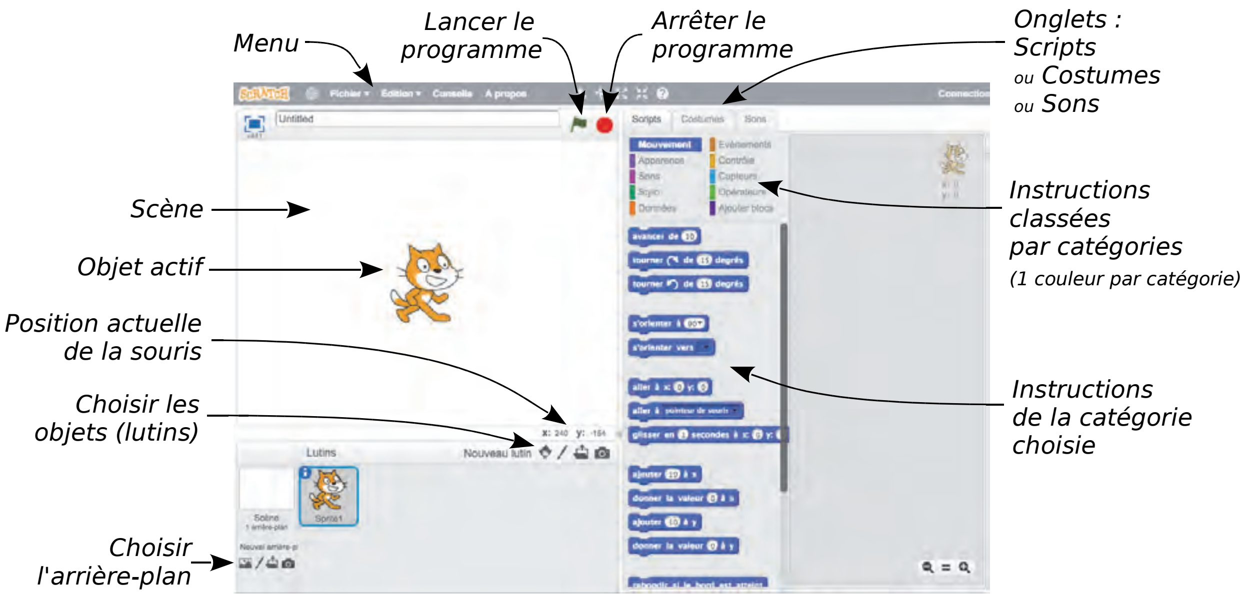
Pour créer ta liste de codage **tablecodage**, tu peux utiliser le code en demandant deux clés.

Présentation générale

Tu peux utiliser le logiciel en ligne ou hors connexion. Plus d'infos : g5.re/scr

Si ta version n'est pas en français, clique sur le globe :

Au lancement de SCRATCH, un chat se trouve au centre d'une **scène**, comme ci-dessous.



La largeur de la scène est égale à 480 points et sa hauteur à 360 points.

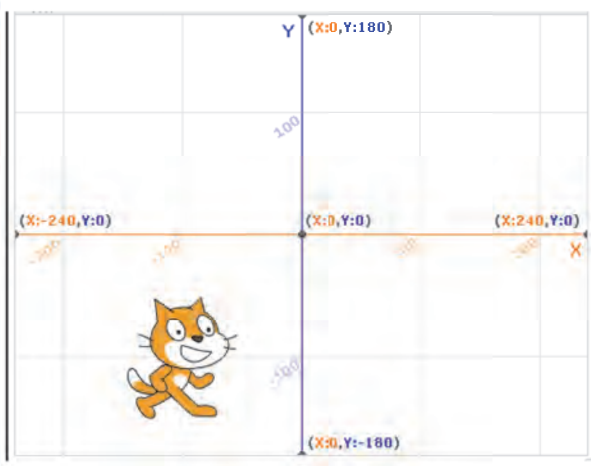
Dans SCRATCH, un objet est appelé « lutin ».

On le positionne à l'aide de deux coordonnées qui sont désignées par les lettres **x** et **y**.

La première coordonnée, **x**, varie entre – 240 et 240 et la seconde coordonnée, **y**, varie entre – 180 et 180.

Par exemple, le chat ci-contre est à la position (– 100 ; – 100).

Les coordonnées du chat s'affichent en haut à droite de la fenêtre *Scripts*.



L'arrière-plan *xy-grid* permet de voir la grille et les coordonnées.

Pour mieux comprendre ce système de repérage, déplace le chat à l'aide de la souris et observe ses coordonnées (fenêtre *Scripts* en haut à droite).

Le cadre bleu montre que le chat est sélectionné.

Sur la scène, tu peux trouver deux types d'éléments :
- le **décor** (en arrière-plan) ;
- les objets qui sont appelés **lutins**.

Pour agir sur un lutin, on écrit un programme dans la fenêtre *Scripts* (chaque lutin a son programme).
Tu vas maintenant apprendre à écrire un programme qui agira sur le chat.

Tutoriel SCRATCH

Dans la catégorie **Évènements**, sélectionne l'instruction quand 🏴 cliqué puis dépose-la dans la partie droite de la fenêtre *Scripts*.

Dans la catégorie **Mouvement**, sélectionne l'instruction avancer de (10) puis dépose-la à la suite de l'instruction précédente. Ces deux instructions s'emboitent (elles ont la forme de pièces de puzzle).

Tu obtiens ce script. →

À la place de 10, écris dans la petite zone ovale : 20.

À chaque fois que tu cliqueras sur le drapeau 🏴 (en haut, au milieu), ton programme sera exécuté et le chat avancera de 20 points. Comme il est orienté vers la droite, il avancera de 20 points vers la droite.

Entre deux lancements, tu peux déplacer le chat avec la souris. Si tu lances le programme, le chat se déplacera de 20 points vers la droite à partir de cette nouvelle position.

Saisis maintenant le programme ci-contre. →

L'instruction attendre (1) secondes se trouve dans la catégorie **Contrôle**.

On commence par placer le chat en (0 ; 0) et on l'oriente vers la droite grâce au couple d'instructions :

aller à x: (0) y: (0)
s'orienter à (90▾)

Puis on exécute successivement 4 fois ces instructions :

avancer de (100)
attendre (1) secondes
tourner ↻ de (90) degrés

Elles se répèteront 4 fois quand le programme sera exécuté.

Pour éviter ces répétitions d'instructions, on utilise l'instruction de **Contrôle** : répéter (4) fois

Pour supprimer une instruction ou un bloc d'instructions, il suffit de faire un clic droit sur le bloc et de choisir *Supprimer*. Tu peux également détacher les blocs du programme.

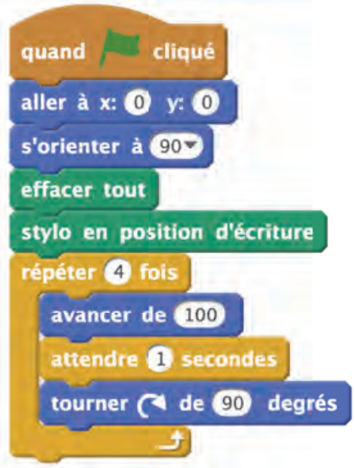
Pour terminer ce petit programme, nous allons maintenant demander au chat de laisser une trace de son passage.

Un stylo invisible est attaché à chaque objet de SCRATCH (ici le chat). Par défaut, le stylo est relevé et donc, quand le chat se déplace, aucun trait n'est dessiné.

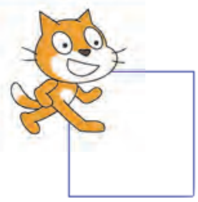
Pour mettre le stylo en position d'écriture, utilise la catégorie **Stylo** et modifie ton programme comme ci-contre.

Voici la procédure :

- le chat va en (0 ; 0) ;
- on l'oriente vers la droite ;
- on efface tous les traits ;
- on pose le stylo.



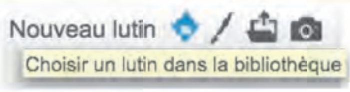
Lance le programme... et découvre le résultat !



Le jeu du labyrinthe

But du jeu :
Le perroquet doit rejoindre le papillon à la sortie du labyrinthe.
Il doit éviter les murs et les sorcières, sous peine d'être renvoyé à la case *Départ*.

Création du lutin-héros (le perroquet) qui se déplacera dans le labyrinthe

Crée un nouveau projet : Fichier / Nouveau Effacer le lutin *Sprite1* : clic droit / *Supprimer*	
Clique sur le bouton *Choisir un lutin dans la bibliothèque*.	
Sélectionne la catégorie *Animaux*.	
Puis double-clique sur *Parrot2*. Il apparait sur la scène, ainsi que dans la fenêtre contenant les différents lutins du programme.	

Création du lutin-cible (le papillon)

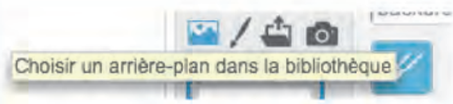
Crée un deuxième lutin dans la bibliothèque.
Choisis le lutin *Butterfly2*.
Maintenant, deux lutins occupent la scène.
Pour l'instant, ne te préoccupe pas de leur taille, ni de leur position sur la scène.

Création du labyrinthe

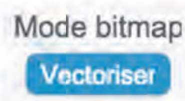
Sélectionne l'*Arrière-plan*.

Puis vérifie que c'est bien l'onglet *Arrière-plan* qui est actif.

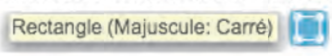
Sélectionne une image d'arrière-plan : par exemple l'arrière-plan *slopes* (que tu trouveras rapidement en cliquant sur le thème *Vacances*).
Il apparait alors sur la scène.



En bas à droite de l'écran, clique sur le bouton *Vectoriser* pour passer en mode *Vecteur*, à moins qu'il ne soit déjà sélectionné. Dans ce cas, *Mode Vecteur* et *Convertir en bitmap* sont affichés.

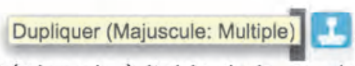


Réalise le premier mur du labyrinthe en créant un rectangle bleu.
Pour cela, utilise la barre d'outils située tout à droite de l'écran :

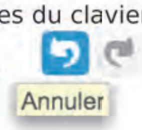
- clique sur le bouton : 

- sélectionne la couleur bleue pour le fond et pour le contour : 
- vérifie que c'est bien un rectangle plein qui va être construit : 

Puis trace le rectangle de la taille souhaitée.

Crée les autres murs.
Clique sur le bouton *Dupliquer* : 

, puis sur le nouveau rectangle (parfaitement superposé au premier). Déplace-le à l'aide de la souris ou des touches fléchées du clavier.

À tout moment, tu peux annuler tes dernières constructions en cliquant sur *Annuler* : 

.

Recommence plusieurs fois les constructions précédentes afin d'obtenir ton labyrinthe.

Positionne les deux lutins correctement, en les déplaçant sur la scène à l'aide de la souris.
Tu devras sans doute changer leur taille.

Pour cela, utilise les boutons *Agrandir* et *Réduire* : 

Ainsi, pour réduire *Parrot2*, clique sur le bouton *Réduire*, puis clique autant de fois que nécessaire sur le perroquet situé sur la scène.

Repère les coordonnées initiales de *Parrot2* (en haut à droite de fenêtre *Scripts*).
Par exemple : **x** = – 139 et **y** = – 115.

Enregistre ton projet. Pour cela, il faut ouvrir un compte SCRATCH. Suis la procédure proposée à l'écran.

Déplacement du lutin *Perroquet*

À chaque lancement du programme, le perroquet doit partir de ses coordonnées de départ. Pour cela, insère l'instruction ci-contre (onglet *Scripts*) et indique les coordonnées repérées précédemment (– 139 ; – 115).

Attention : vérifie que *Parrot2* est bien sélectionné !

Crée les évènements suivants pour permettre au lutin *Parrot2* de se déplacer.

Pour dupliquer, fais un clic droit sur un bloc : tu gagneras du temps !

Teste le programme et e*nregistre ton projet*.

Pour l'instant, le perroquet avance avec les flèches du clavier, mais ignore complètement l'arrière-plan : il doit éviter les murs !

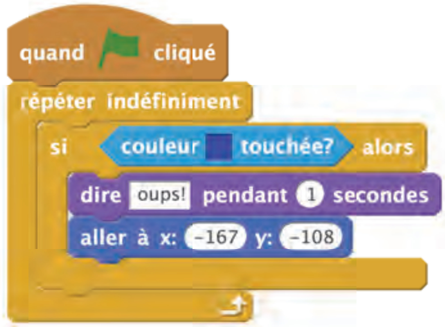
Éviter les murs

Pour éviter les murs, crée le code ci-contre.
Vérifie que *Parrot2* est bien sélectionné car c'est lui qui se déplace dans le labyrinthe.

L'expression couleur ■ touchée? se trouve dans la catégorie **Capteurs**. Pour obtenir le petit carré bleu dans *Couleur touchée*, clique sur ce carré puis sur un mur bleu de la scène.

L'instruction dire oups! pendant 1 secondes se trouve dans la catégorie **Apparence**.

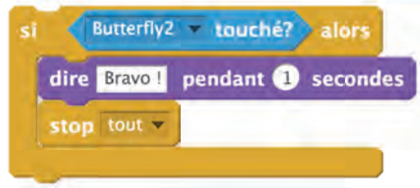
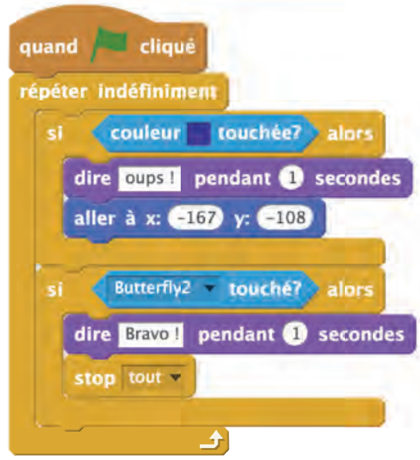
À chaque lancement du programme, ce code sera exécuté indéfiniment. Donc, dès que *Parrot2* touche la couleur bleue (un mur), il dit « oups! » et, une seconde plus tard, retourne à sa position de départ.



Teste le programme et e*nregistre ton projet.*

À présent, le perroquet réagit dès qu'il touche un mur.
Mais pour que la partie soit gagnée, il doit **toucher le papillon** à la sortie du labyrinthe !

Gestion de la sortie du labyrinthe

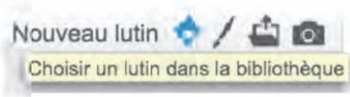
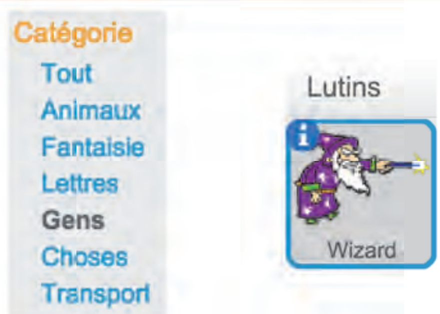
Pour gagner la partie, *Parrot2* doit toucher *Butterfly2*. Pour cela, crée le code ci-contre. L'instruction stop tout se trouve dans la catégorie **Contrôle**. Elle stoppe le programme attaché au lutin.	
Insère ce bloc à la suite du précédent.	

Teste le programme et e*nregistre ton projet.*

Affichage d'un chronomètre

Quand on lance un programme dans SCRATCH, un chronomètre démarre automatiquement. C'est ce qu'on appelle une **variable**.

Par exemple, si le programme est lancé depuis 17 secondes, alors la variable chronomètre vaut 17. Une seconde plus tard, elle vaudra 18. Elle varie donc tout le temps !

Tu vas créer un nouveau lutin qui sera « maitre du temps ». Sa mission consistera à annoncer le chronomètre toutes les secondes ! Clique sur *Choisir un lutin.*	
Dans la catégorie *Gens*, sélectionne le lutin *Wizard* (« sorcier » en français) et clique sur OK. Le sorcier apparait sur la scène.	
Réduis sa taille en cliquant sur le bouton *Réduire*, puis sur *Wizard*, autant de fois que nécessaire. Positionne-le en haut à gauche de la scène.	

Vérifie que *Wizard* est bien sélectionné, puis crée le code ci-contre.

La variable chronomètre se trouve dans la catégorie **Capteurs**. Les variables qui ont la forme ovale sont des **expressions**.

Ce code est appelé en permanence, c'est-à-dire qu'à chaque appel, *Wizard* annonce le chronomètre, **attend** 1 seconde, puis ré-exécute le code...

Pour bien comprendre le fonctionnement du chronomètre, teste le programme.

On remarque que le chronomètre ne tombe pas juste. Pour régler ce problème, on va demander au programme un arrondi du chronomètre.

L'instruction arrondi de est dans le thème **Opérateurs**. Modifie l'instruction comme ci-contre.

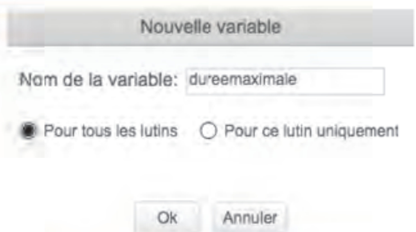
Enregistre ton projet.

Temps-limite et perte de la partie

Il s'agit de créer une variable contenant la durée maximale autorisée pour sortir du labyrinthe.

Dans la catégorie **Données**, clique sur le bouton *Créer une variable*.

Nomme-la : *dureemaximale*.



Cette durée maximale sera fixée à 60 secondes.

Sélectionne *Parrot2* et insère l'instruction mettre dureemaximale à 60 au début de son programme.

La partie est perdue si le temps-limite est dépassé, c'est-à-dire si le chronomètre dépasse 60 secondes.

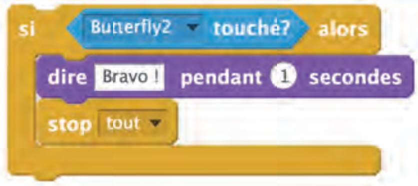
Cette donnée concerne *Parrot2*.

Insère donc le bloc ci-contre au programme.

Affichage du score

La partie est gagnée quand *Parrot2* atteint *Butterfly2*.

Pour afficher le score, nous allons insérer une nouvelle instruction au bloc ci-contre.



Avant stop tout, insère l'instruction :

Si *Parrot2* met 40 secondes à sortir du labyrinthe, le score est alors égal à :
dureemaximale - arrondi de chronomètre, c'est-à-dire : 60 – 40 = 20 secondes.

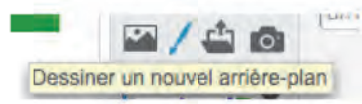
S'il met 35 secondes, le score sera alors supérieur : 60 – 35 = 25 secondes !

Création d'un arrière-plan de fin de partie

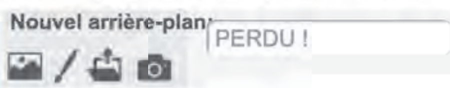
On décide que la partie est perdue dès que le chronomètre dépasse la variable *dureemaximale*.
Le mot «PERDU ! » s'affiche alors en grand sur l'écran.

Crée un nouvel arrière-plan contenant le mot « *PERDU !* », en cliquant successivement sur :

- l'arrière-plan actuel (en bas à gauche),
- l'onglet *Arrière-plans*,
- le bouton *Dessiner un nouvel arrière-plan*.



Écris le texte « *PERDU !* » et agrandis-le.
Renomme cet arrière-plan : *PERDU !*



Sélectionne *Parrot2* et ajoute le code ci-contre.

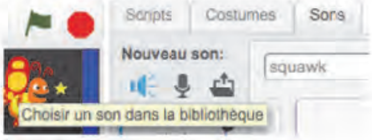
Quand le chronomètre dépasse la variable *dureemaximale*, alors on bascule sur l'arrière-plan *PERDU !* et le programme s'arrête.

Attention : au lancement de la partie, veille à ce que l'arrière-plan de départ soit le bon !

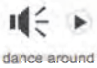
Enregistre ton programme.

Sonorisation du jeu

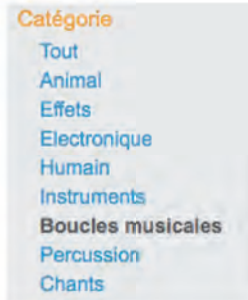
Sélectionne *Parrot2*, clique sur l'onglet *Sons* , puis sur *Choisir un son dans la bibliothèque*.



Dans la catégorie *Boucles musicales*,

sélectionne la boucle *dance around* : 

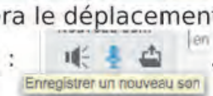
.



Clique sur l'onglet *Scripts*.

Insère les instructions ci-contre ; elles seront exécutées au début du programme.

À présent, nous allons créer un son (avec ta voix) qui accompagnera le déplacement de *Parrot2*.

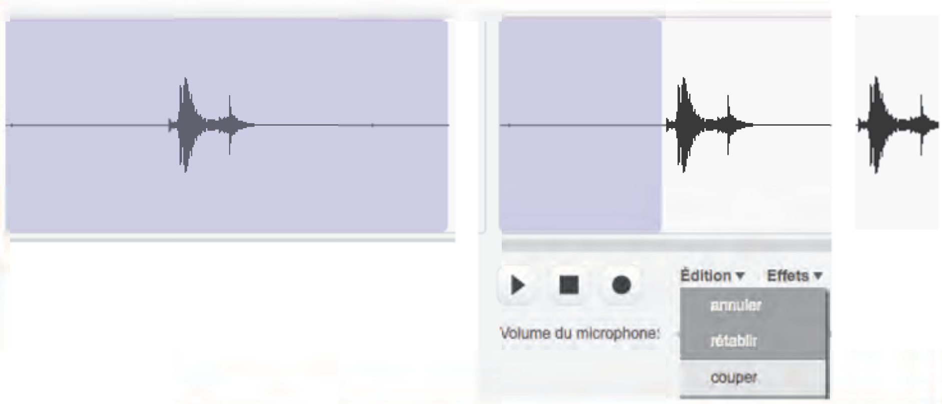
Sélectionne l'onglet *Sons* et clique sur *Enregistrer un nouveau son* : 

.

Pour enregistrer ta voix, clique sur *Enregistrer* : , puis à nouveau sur ce bouton pour stopper l'enregistrement.

Pour ne pas ralentir les déplacements de *Parrot2*, le son doit être bref.

Procède comme ci-contre.



Si tu n'as rien changé, ce nouveau son a pour nom : *enregistrement1*.

Clique sur l'onglet *Scripts* et insère les instructions ci-contre.

Enregistre ton programme.

Si tu insères l'instruction jouer du tambour 1 pendant 0.25 temps, le programme devra attendre la fin du son pour continuer, ce qui ralentira tellement les déplacements du lutin que le jeu ne pourra pas se dérouler correctement.

Avec le son que nous avons installé, le programme n'attendra pas la fin du son et le rythme du jeu ne sera pas affecté.

Création d'un obstacle mobile

Crée un nouveau lutin *Witch* : 

.

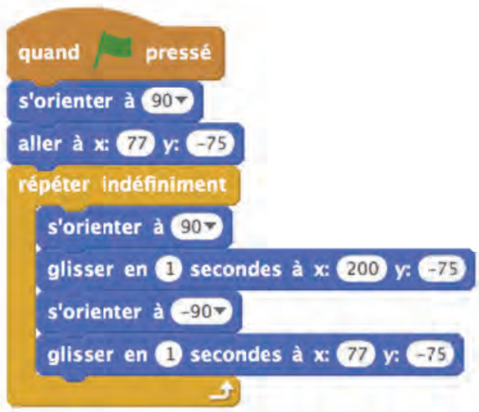
Réduis sa taille et positionne le personnage en bas à droite de l'écran : cette sorcière va faire des allers-retours, de droite à gauche, en restant à la même hauteur.
Il faudra absolument l'éviter !

Admettons qu'elle se trouve sur la scène en (77 ; – 75).
Attention : tu peux choisir des coordonnées différentes !

Pour programmer ses déplacements, on utilise l'instruction : glisser en 1 secondes à x: y: .

(Elle permet de créer facilement de nombreux circuits.)

Vérifie que le sens d'orientation de *Witch* est correct :



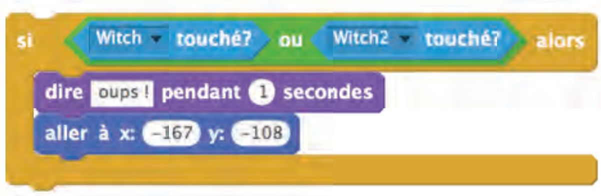
Pour créer d'autres obstacles :

Duplique le lutin *Witch* (son code sera dupliqué également).
Witch2 apparait alors sur la scène. Tu n'as plus qu'à modifier son code pour adapter son déplacement.

Pour programmer la collision éventuelle de *Parrot2* avec l'une des deux sorcières :

Crée le code ci-contre pour qu'à chaque instant, le programme teste si *Parrot2* touche *Witch* ou *Witch2*. Si c'est le cas, alors *Parrot2* retourne à la case Départ !

Attention : veille à ce que ces instructions soient bien déposées sur le script de *Parrot2* !



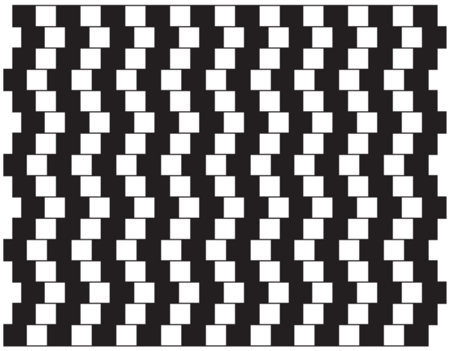
Exemple de paramétrage du jeu à l'aide d'une variable

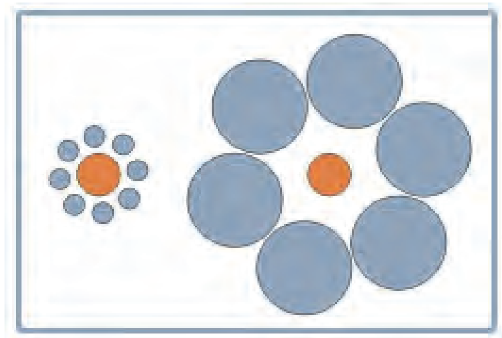
Crée une variable **vitesse**. Attention : il faut que la case soit cochée pour voir sa valeur sur la scène. Au début du programme, initialise-la à 10.	Créer une variable ☑ vitesse mettre vitesse à 10
Modifie les instructions de déplacement, telles que celle-ci : ajouter 10 à x. Pour obtenir un nombre négatif, tu multiplieras la variable par – 1 (les expressions mathématiques figurent dans la catégorie **Opérateurs**). N'oublie pas de modifier les deux autres déplacements.	ajouter vitesse à x ajouter (–1 * vitesse) à x
En cours de jeu, on souhaite pouvoir changer de vitesse. Par défaut, la vitesse est 10. Si on appuie sur la barre *Espace*, alors elle passe à 40. Si on appuie à nouveau, elle revient à 10, et ainsi de suite. Pour programmer cet évènement, utilise l'instruction si … alors … sinon … de **Contrôle** :	quand espace est cliqué si vitesse = 10 alors mettre vitesse à 40 sinon mettre vitesse à 10

Bravo !
Tu as programmé ton premier jeu.
Teste-le auprès de tes amis !

Des outils pour raisonner

1 Il faut se méfier de ce que l'on voit.





Illusion de Titchener

a Comment semblent les lignes de la première image ? Et pourtant...

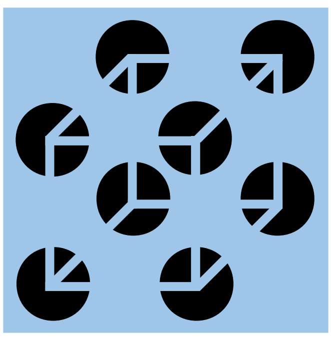
b Que dire des deux disques oranges de la deuxième image ? Et pourtant...

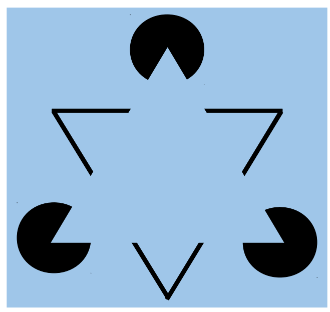
c Trace précisément deux cercles concentriques de rayons 2 cm et 2,2 cm. À côté, trace deux autres cercles concentriques de rayons 1,8 cm et 2 cm. Que vois-tu ?

d Essaie de trouver ou de fabriquer d'autres illusions d'optique que tu montreras à tes camarades.

2 Il faut se méfier de ce qui n'existe pas.

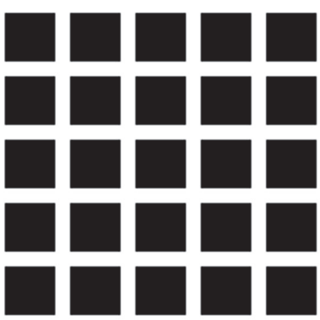
a Que vois-tu ?



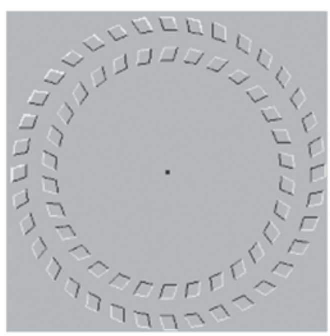


Illusion de Kanizsa

b Qu'aperçois-tu à l'intersection des lignes ? Est-ce réel ? Reproduis ce dessin en prenant 1 cm pour mesure du côté du carré.



c Fixe bien le point au centre de l'image tout en t'approchant et en t'éloignant de la page. Un effet surprenant se produira...



Baingio Pinna

3 Il faut se méfier des évidences !

a ***Petits problèmes***

- Une bouteille d'huile d'olive coute 6 €. L'huile d'olive coute 5 € de plus que la bouteille. Combien coute la bouteille vide ?
- Le prix d'un meuble est diminué de 50 % puis augmenté de 50 %. Quel est alors son prix ? Vérifie en prenant 400 € pour prix de départ.

b Que peux-tu dire à propos du *triangle de Penrose* ci-dessous ?

c Fais des recherches sur les œuvres du dessinateur M.C. Escher, et en particulier sur les lithographies intitulées « *Belvédère* », « *Montée et descente* », « *Mouvement perpétuel* ». Ces dessins paraissent normaux au premier coup d'œil mais, en y regardant de plus près, que constates-tu ?

4 Instruments ou calculs ?

a Construis un triangle TUC tel que UC = 7 cm, $\widehat{TUC} = 54°$ et $\widehat{TCU} = 35°$.

b En utilisant tes instruments de géométrie, détermine la nature du triangle TUC.

c À l'aide d'un calcul, détermine la mesure de l'angle $\widehat{UTC}$.
Compare avec ce que tu as trouvé à la question **b**.

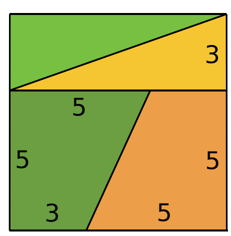
5 Pourquoi démontrer ?

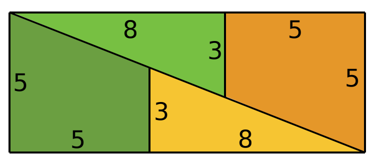
a Construis un carré de 8 cm de côté, puis découpe-le en quatre pièces comme ci-contre.

b Assemble ces quatre pièces comme dans la figure du bas.

Selon toi, est-ce le puzzle d'un rectangle ?

c Calcule l'aire du carré et du rectangle. Conclus.





6 Soyons critiques

Le professeur présente un énoncé mathématique :

« Dans une division euclidienne, le quotient est toujours supérieur au reste. »

Ingrid dit : « Cet énoncé est vrai, ça marche pour tous les exemples que j'ai pris. ».

Stéphane dit : « Cet énoncé est parfois vrai, parfois faux ! C'est vrai pour 16 ÷ 3, mais c'est faux pour 26 ÷ 11. ».

Stella dit : « Cet énoncé est donc faux car il y a un exemple qui ne marche pas. ».

À ton avis, qui a raison et qui a tort ?

7 Si... alors...

a Recopie chacune des propriétés suivantes. Souligne en vert la condition pour l'utiliser, et en rouge ce qu'elle permet de montrer (la conclusion).

- **Si** un nombre est divisible par 9, **alors** il est divisible par 3.
- **Si** un nombre se termine par 0 ou 5, **alors** il est divisible par 5.
- **Si** un nombre entier est impair, **alors** son carré est impair.
- **Si** on ajoute deux nombres opposés, **alors** leur somme est nulle.
- **Si** deux droites sont parallèles à une même troisième, **alors** elles sont parallèles entre elles.
- **Si** un point appartient à la médiatrice d'un segment, **alors** il est équidistant des extrémités de ce segment.
- **Si** un quadrilatère est un parallélogramme, **alors** ses diagonales ont le même milieu.

b Donne un exemple pour chaque propriété numérique et illustre par un dessin chaque propriété géométrique.

8 Un exemple, oui mais...

a Recopie et complète le tableau suivant.

x	0	1	2	3	4	5	10
$2x + 3x$							
$2 + 3x$							
$5x$							

b L'égalité $2 + 3x = 5x$ est-elle vraie pour une valeur de x ?

Cette égalité est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ?

c L'égalité $2x + 3x = 2 + 3x$ est-elle vraie pour une valeur de x ?

Cette égalité est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ?

d L'égalité $2x + 3x = 5x$ est-elle vraie pour une valeur de x ?

Cette égalité est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ?

Les calculs du tableau suffisent-ils pour répondre à cette question ? Pourquoi ?
Que dois-tu utiliser pour y répondre ?

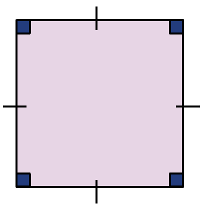
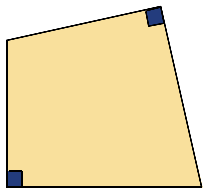
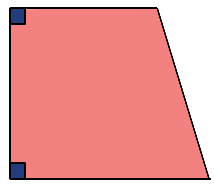
9 Autour du contre-exemple

a Voici plusieurs énoncés faux. Pour chacun d'eux, écris ce que doit vérifier un contre-exemple.

- **Si** un quadrilatère a deux côtés parallèles, **alors** c'est un parallélogramme.
- **Si** les diagonales d'un quadrilatère ont la même longueur, **alors** c'est un rectangle.
- Le carré d'un nombre entier est pair.
- L'opposé d'un nombre est négatif.
- **Si** une fraction est inférieure à 1, **alors** son numérateur est supérieur à son dénominateur.

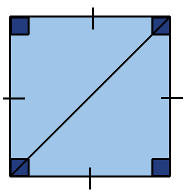
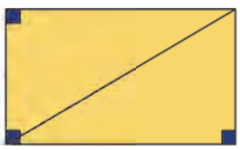
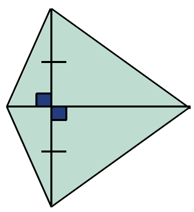
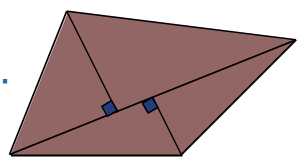
b Quelle(s) figure(s) est(sont) un(des) contre-exemple(s) de l'énoncé suivant ?

Si un quadrilatère a deux angles droits, **alors** c'est un rectangle.

1. 
2. 
3. 
4. 

c Quelle(s) figure(s) est(sont) un(des) contre-exemple(s) de l'énoncé suivant ?

Chaque diagonale partage un quadrilatère en deux triangles de même aire.

5. 
6. 
7. 
8. 

d Parmi les propositions ci-dessous, quels sont les contre-exemples de l'énoncé suivant ?

Si un nombre est supérieur à 16, **alors** il est supérieur à 18.

• 12,3 • 15 • 16,5 • 17 • 17,9 • 19 • 27

e Modifie les énoncés des questions **a**, **b**, **c** et **d** pour qu'ils soient vrais.

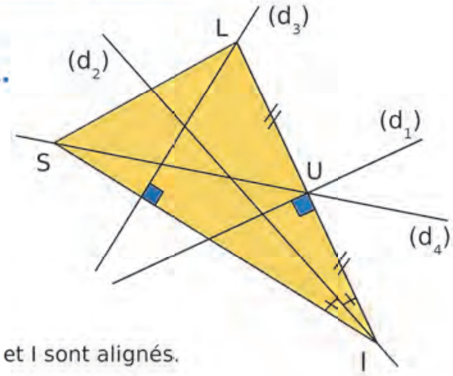
10 Vrai ou faux

Pour chaque énoncé ci-dessous, indique s'il est vrai ou faux. Dans le cas où il est faux, donne un contre-exemple pour justifier ta réponse.

- **Si** deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une, **alors** elle est perpendiculaire à l'autre.
- **Si** un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, **alors** c'est un parallélogramme.
- **Si** un triangle a deux angles égaux, **alors** il est équilatéral.
- **Si** $3x + 2y = 67$, **alors** $x = 11$ et $y = 17$.
- **Si** $3x + 1 = 7$, **alors** $x = 2$.
- Le carré d'un nombre est toujours positif.

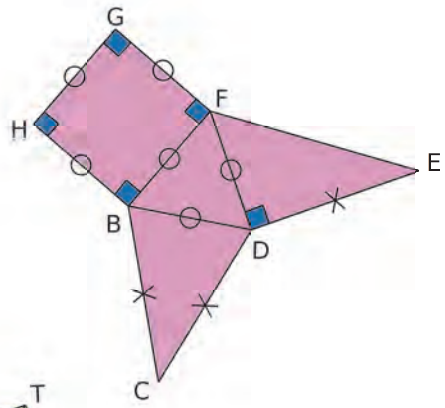
11 Dessins codés

1.

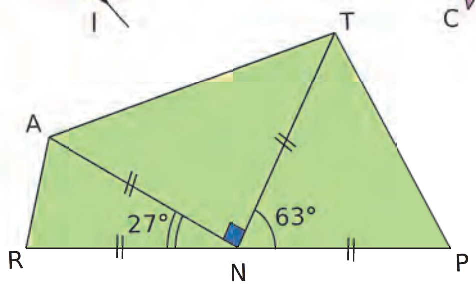


L, U et I sont alignés.

2.



3.



a Pour chaque dessin, indique toutes les informations fournies par le codage.

b Dans le dessin **1**, que représente chaque droite pour le triangle LIS ? Précise la définition pour chaque réponse.

c Quelles sont les natures des quadrilatères et des triangles particuliers dans le dessin **2** ? Précise la définition pour chaque réponse.

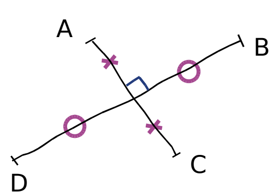
d À propos du dessin **3**, quelle question peut-on poser ?

12 Dessins et propriétés

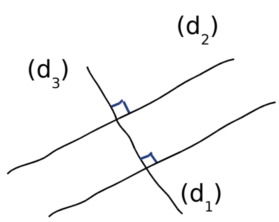
a Pour chacun des dessins codés ci-dessous, énonce une propriété que l'on peut appliquer.

b Que peux-tu en conclure dans chaque cas ?

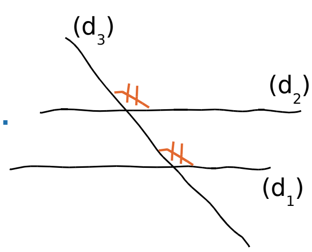
1.



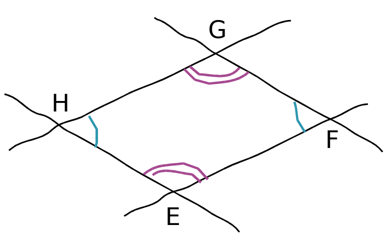
2.



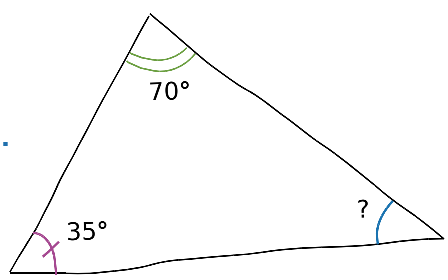
3.



4.



5.



Corrigés des exercices

N1

15 Compare les nombres relatifs suivants.

a. − 3 <+ 2
b. + 1 < + 9
c. − 5 > − 9
d. − 4 < − 1
e. − 8 < + 8
f. + 5 > − 1
g. − 25 > − 35
h. − 43 < + 43

26 Effectue les additions suivantes.

a. (+ 6) + (+ 7) = (+ 13)
b. (− 1) + (+ 1) = 0
c. (− 3) + (− 5) = (− 8)
d. (+ 11) + (− 12) = (− 1)
e. (− 5) + (− 15) = (− 20)
f. (+ 3) + (− 8) = (− 5)
g. (− 22) + (+ 17) = (− 5)
h. (− 9) + (+ 20) = (+ 11)

37 Effectue les calculs suivants.

a. 6 − 7 = − 1
b. − 3 − 5 = − 8
c. − 13 + 23 = 10
d. 9 − 18 = − 9
e. 14 − 20 = − 6
f. − 44 − 44 = − 88
g. − 55 + 45 = − 10
h. 200 − 73 = 127
i. − 28 − 8 = − 36
j. − 3 + 19 = 16
k. 32 − 100 = − 68
l. − 18 − 28 = − 46

40 Calcule.

$A = 33 - 23 + 27 - 57 + 38$
$A = \underline{33 + 27 + 38} - \underline{23 - 57} = 98 - 80 = 18$

$B = -33 + 23 - 27 + 57 - 38 - 1\,000$
$B = \underline{-33 - 27 - 38 - 1\,000} + 23 + 57$
$B = -1\,098 + 80 = -1\,018$

$C = 330 - 230 + 270 - 570 + 380$
$C = \underline{330 + 270 + 380} - 230 - 570$
$C = 980 - 800 = 180$

$D = 3{,}3 - 2{,}3 + 2{,}7 - 5{,}7 + 3{,}8$
$D = 3{,}3 + 2{,}7 + 3{,}8 - 2{,}3 - 5{,}7 = 9{,}8 - 8 = 1{,}8$

49 ***Calcul mental***

a. (− 8) × (+ 2) = (− 16)
b. (− 2) × (+ 5) = (− 10)
c. (− 4) × (− 8) = 32
d. (+ 9) × (+ 10) = 90
e. (+ 191) × (+ 0,1) = 19,1
f. (− 1,5) × (+ 20) = (− 30)
g. (− 0,25) × (− 4) = 1
h. (+ 0,8) × (− 3) = (− 2,4)
i. (− 3,2) × (+ 4) = (− 12,8)
j. (− 1) × (− 17) = 17

79 ***Calcul mental***

a. (− 100) ÷ (+ 25) = (− 4)
b. (− 42) ÷ (− 4) = 10,5
c. (+ 54) ÷ (− 3) = (− 18)
d. (+ 55) ÷ (+ 5) = 11
e. (− 24) ÷ (− 5) = 4,8
f. (− 13) ÷ (− 10) = 1,3

102 Effectue les calculs suivants.

$A = 7 + \underline{(-6) \times (-6)} = 7 + 36 = 43$
$B = 13 - \underline{(+3) \times (-4)} - 8$
$B = 13 - (-12) - 8 = \underline{13 + 12} - 8 = 25 - 8 = 17$
$C = -30 \div (\underline{-9 + 15}) = -30 \div (6) = -5$
$D = -3 \underline{-9 \times (-3)} = -3 + 27 = 24$
$E = -3 \times 6 \times \underline{(-2 + 8)} = -3 \times 6 \times (6) = -108$

N2

18 Recopie et complète.

a. $\frac{2}{3} = \frac{18}{27}$
b. $\frac{11}{8} = \frac{55}{40}$
c. $\frac{4}{7} = \frac{24}{42}$
d. $\frac{9}{10} = \frac{81}{90}$

32 Dans chaque cas, réécris les nombres avec le même dénominateur positif, puis compare-les.

a. $\frac{-5}{8} = \frac{-15}{24}$ et $\frac{-3{,}8}{6} = \frac{-15{,}2}{24}$
Or − 15 > − 15,2. Donc $\frac{-5}{8} > \frac{-3{,}8}{6}$

b. $\frac{14}{5} = \frac{98}{35}$ et $\frac{20}{7} = \frac{100}{35}$
Or 98 < 100. Donc $\frac{14}{5} < \frac{20}{7}$

c. $\frac{3}{-50} = \frac{-9}{150}$ et $-\frac{4}{75} = \frac{-8}{150}$
Or − 9 < − 8 . Donc $\frac{3}{-50} < -\frac{4}{75}$

d. $\frac{54{,}5}{0{,}27} = \frac{7{,}085}{0{,}0351}$ et $\frac{-2{,}62}{-0{,}13} = \frac{0{,}7074}{0{,}0351}$
Or 7,085 > 0,7074. Donc $\frac{54{,}5}{0{,}27} > \frac{-2{,}62}{-0{,}13}$

43 Effectue les opérations suivantes.

a. $\frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{14}{8} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$
b. $\frac{1}{2} + \frac{3}{26} = \frac{13}{26} + \frac{3}{26} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$
c. $\frac{8}{4} + \frac{4}{8} = \frac{16}{8} + \frac{4}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$
d. $\frac{13}{7} + \frac{13}{21} = \frac{39}{21} + \frac{13}{21} = \frac{52}{21}$
e. $\frac{1}{11} + \frac{2}{33} = \frac{3}{33} + \frac{2}{33} = \frac{5}{33}$
f. $\frac{7}{10} + \frac{9}{2} = \frac{7}{10} + \frac{45}{10} = \frac{52}{10} = \frac{26}{5}$

70

a. Recopie et complète : $\frac{5}{12} = \frac{25}{60}$ et $\frac{7}{20} = \frac{21}{60}$

b. Calcule : $\frac{5}{12} + \frac{7}{20} = \frac{25}{60} + \frac{21}{60} = \frac{46}{60} = \frac{23}{30}$

c. Calcule : $\frac{5}{12} - \frac{7}{20} = \frac{25}{60} - \frac{21}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$

N3

17 Même énoncé qu'à l'exercice précédent

a. $\frac{2{,}5}{3} \times \frac{3}{0{,}5} = \frac{5\times0{,}5\times3}{3\times0{,}5} = 5$

b. $5{,}6 \times \frac{9}{0{,}7} = \frac{0{,}7\times8\times9}{0{,}7} = 72$

c. $0{,}55 \times \frac{2}{11} = \frac{11\times0{,}05\times2}{11} = 0{,}1$

48 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $-9{,}1 \times (-45{,}6) = 414{,}96$
et $5{,}2 \times 79{,}8 = 414{,}96$
Les produits en croix sont égaux, donc :
$\frac{-9{,}1}{5{,}2} = \frac{79{,}8}{-45{,}6}$

b. $-3 \times (-3{,}5) = 10{,}5$ et $-5 \times 2{,}1 = -10{,}5$
Les produits en croix ne sont pas égaux, donc :
$\frac{-5}{-3} \neq \frac{-3{,}5}{2{,}1}$

51 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{1}{-3} \times (-3) = 1$ $\quad \frac{1}{-3}$ est l'inverse de -3.

b. $-15 \times \left(-\frac{1}{15}\right) = 1$ $\quad -15$ est l'inverse de $-\frac{1}{15}$.

c. $\frac{-5}{8} \times \left(-\frac{8}{5}\right) = 1$ $\quad \frac{-5}{8}$ est l'inverse de $-\frac{8}{5}$.

d. $-0{,}01 \times -100 = 1$ $\quad -100$ est l'inverse de $-0{,}01$.

58 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\frac{8}{-15} \div \frac{-4}{5} = \frac{8}{15} \times \frac{5}{4} = \frac{4\times2\times5}{3\times5\times4} = \frac{2}{3}$

b. $\frac{9}{10} \div (-3) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{-3} = -\frac{3\times3}{10\times3} = -\frac{3}{10}$

c. $\frac{-4}{45} \div \frac{16}{15} = \frac{-4}{45} \times \frac{15}{16} = -\frac{4\times3\times5}{3\times3\times5\times4\times4} = -\frac{1}{12}$

d. $\frac{-5}{6} \div \left(-\frac{15}{18}\right) = \frac{5}{6} \times \frac{18}{15} = \frac{5\times3\times6}{6\times3\times5} = 1$

N4

17 Écris sous forme d'un produit, puis donne l'écriture décimale de chaque nombre.

$A = 2^5 = 2\times 2\times 2 \times 2 \times 2 = \mathbf{32}$
$B = 7^3 = 7\times 7\times 7 = \mathbf{343}$
$C = 3^4 = 3\times 3\times 3 \times 3 = \mathbf{81}$
$D = 4^3 = 4\times 4\times 4 = \mathbf{64}$
$E = 12^1 = \mathbf{12}$
$F = 1^6 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = \mathbf{1}$

35 Écris à l'aide d'une puissance de 10.

a. $10\,000 = 10^4$ $\quad 10\,000\,000 = 10^7$
$1\,000\,000 = 10^6$ $\quad 1\,000 = 10^3$

b. cent : 10^2 $\quad$ cent mille : 10^5
un milliard : 10^9 $\quad$ mille milliards : 10^{12}

47 Effectue les calculs suivants.

$A = 10^{-1} + 10^{-2} = 0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}11$
$B = 10^{-1} - 10^{-2} = 0{,}1 - 0{,}01 = 0{,}09$
$C = 10^{-1} \times 10^{-2} = 0{,}1 \times 0{,}01 = 0{,}001$
$D = 10^{-1} \div 10^{-2} = 0{,}1 \div 0{,}01 = 10$

65 Associe à chaque nombre de gauche son écriture scientifique.

45,68	$4{,}568 \times 10^{-1}$
456,8	$4{,}568 \times 10^{1}$
0,456 8	$4{,}568 \times 10^{-3}$
0,004 568	$4{,}568 \times 10^{2}$

N5

16 Développe les expressions suivantes.

$E = 9 \times (x - 3) = 9x - 27$
$F = 4 \times (5 - x) = 20 - 4x$
$G = 7(x - 8) = 7x - 56$
$H = 6(9 - x) = 54 - 6x$

29 Factorise les expressions suivantes.

$E = 9 - 72x = 9\,(1 - 8x)$
$F = 12 - 8x = 4\,(3 - 2x)$
$G = -6x - 18 = -6(x + 3)$
$H = 42 - 14x = 14\,(3 - x)$

53 Développe puis réduis chaque expression.

$G = x(x + 6) - x = x^2 + 6x - x = x^2 + 5x$

$H = x(y - 2) + xy = xy - 2x + xy = 2xy - 2x$

$I = 3x(x + 4) - 6x^2 = 3x^2 + 12x - 6x^2 = 12x - 3x^2$

$J = 9x(x^2 - 6) + 2x^2 = 9x^3 - 54x + 2x^2$

$K = 5x(3 + 5x) + x(5 + x) + 4x(2x + 1)$
$K = 15x + 25x^2 + 5x + x^2 + 8x^2 + 4x$
$K = 34x^2 + 24x$

58 Développe et réduis chaque expression.

$E = (x + 4)(x + 3)$
$E = x^2 + 4x + 3x + 12 = x^2 + 7x + 12$

$F = (y + 3)(2y + 8)$
$F = 2y^2 + 6y + 8y + 24 = 2y^2 + 14y + 24$

$G = (3z + 4)(5 - 6z) = 15z - 18z^2 + 20 - 24z$
$G = -18z^2 - 9z + 20$

$H = (-7t + 8)(3 - 5t) = -21t + 35t^2 + 24 - 40t$
$H = 35t^2 + 24 - 61t$

N6

13 Le nombre -5 est-il solution de l'équation $5 - 4x = 19$? Et le nombre $-3{,}5$?

Pour $x = -5$:
$5 - 4x = 5 - 4 \times (-5) = 5 + 20 = 25$
Donc -5 n'est pas solution de l'équation $5 - 4x = 19$

Pour $x = -3{,}5$:
$5 - 4x = 5 - 4 \times (-3{,}5) = 5 + 14 = 19$
Donc $-3{,}5$ est solution de l'équation $5 - 4x = 19$

25 Résous les équations suivantes.

a. $3x = 9$ donc $x = 9 \div 3 = 3$

b. $5y = 3$ donc $y = 3 \div 5 = 0{,}6$

c. $4z = -7$ donc $z = -7 \div 4 = -1{,}75$

d. $-z = -8$ donc $z = 8$

e. $7x = 4$ donc $x = 4 \div 7 = \frac{4}{7}$

f. $4z = 0$ donc $z = 0$

43 Joey pense à un nombre. Il lui ajoute 11, multiplie le tout par 3 et retranche 3 au résultat obtenu. Joey obtient 51.
Quel est son nombre de départ ?

Soit x le nombre auquel Joey pense.

$3(x + 11) - 3 = 51$ donc $3x + 33 - 3 = 51$

soit $3x + 30 = 51$ ou encore $3x = 21$.

On en déduit que $x = 21 \div 3 = 7$.

Vérification : $7 + 11 = 18$
$18 \times 3 = 54$ et $54 - 3 = 51$

G1

13 **a.** Son hypoténuse est [NR].

b. Les côtés de l'angle droit sont [AJ] et [AT].

23 ABC est un triangle rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

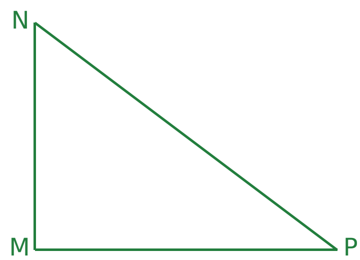
Donc : $BC^2 = 48^2 + 64^2 = 2304 + 4096 = 6400$

et $BC = \sqrt{6400} = 80$ mm.

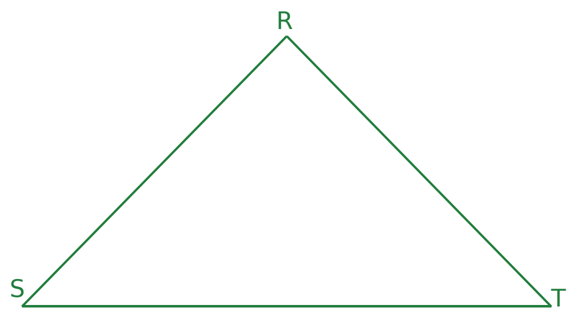
29 RST est un triangle rectangle en R donc, d'après le théorème de Pythagore :
$TS^2 = TR^2 + RS^2$ Donc : $10^2 = 7^2 + RS^2$
$RS^2 = 10^2 - 7^2 = 100 - 49 = 51$
$RS = \sqrt{51} \approx 7{,}1$ cm.

50

a.



b.



c. Dans le triangle MNP, le plus long côté est [NP].
D'une part : $NP^2 = 5^2 = 25$
D'autre part : $MN^2 + PM^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
On constate que $NP^2 = MN^2 + PM^2$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MNP est rectangle en M.

Dans le triangle RST, le plus long côté est [ST].
D'une part : $ST^2 = 7^2 = 49$
D'autre part : $RS^2 + RT^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$
On constate que $ST^2 \neq RS^2 + RT^2$
Donc, d'après le théorème de Pythagore, le triangle RST n'est pas rectangle.

G2

10 **a.** [ON] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ONU}$.
[OU] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{OUN}$.

b. $\cos \widehat{ONU} = \dfrac{ON}{UN}$ et $\cos \widehat{OUN} = \dfrac{OU}{UN}$

11 **a.** $\dfrac{UI}{UV} = \cos \widehat{VUI}$ **b.** $\dfrac{VI}{VU} = \cos \widehat{UVI}$

22 **a.** $\cos \widehat{IDX} = \dfrac{DI}{DX}$

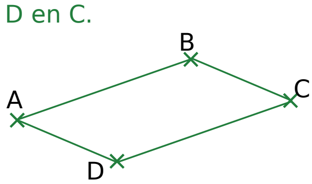
b. $\cos 43° = \dfrac{3{,}5}{DX}$ donc $DX = \dfrac{3{,}5}{\cos 43°} \approx 4{,}8$ cm

34 **a.** Les angles aigus d'un triangle rectangle sont correspondants, donc $\widehat{GZA} = 90° - 27° = 63°$

b. Dans le triangle AGZ rectangle en Z :
$\cos \widehat{GZA} = \dfrac{GZ}{AZ}$ donc $\cos 63° = \dfrac{GZ}{6{,}6}$
$GZ = 6{,}6 \times \cos 63° \approx 3{,}0$ cm

G3

11 B est l'image de A par la translation qui transforme D en C.

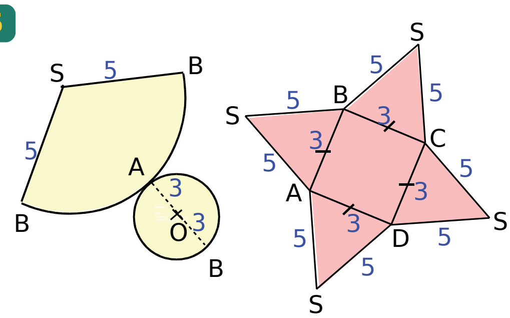


17 S est l'image de T par la rotation de centre O et d'angle 120°.
R est l'image de S par la rotation de centre O et d'angle 120°.
T est l'image de R par la rotation de centre O et d'angle 120°.
R est l'image de T par la rotation de centre O et d'angle 240°.

40 La translation conserve les longueurs, donc BC = LP = 4 cm.
ABC est un triangle rectangle d'aire :
$(2 \times 4) \div 2 = 4$ cm².
La translation conserve les aires donc :
Aire (NLP) = Aire (ABC) = 4 cm².

G4

15



21 **a.** OSB est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore :
SB² = SO² + OB² soit
SO² = 10² – 6² = 100 – 36 = 64
Donc SO = 8 cm.

b. Dans le triangle OSB, rectangle en O :
$\cos \widehat{OSB} = \dfrac{OS}{SB} = \dfrac{8}{10}$ donc $\widehat{OSB} \approx 37°$

c. (BO) et (HM) sont parallèles, donc toute perpendiculaire (SO) à l'une est perpendiculaire à l'autre. Les droites (SO) et (HM) sont donc perpendiculaires.

d. Dans le triangle SHM rectangle en M :
$\cos \widehat{OSB} = \dfrac{SH}{SM} = 0{,}8$ donc $SH = 0{,}8 \times SM = 3{,}2$ cm
D'après le théorème de Pythagore :

SM² = SH² + HM² soit
HM² = 4² – 3,2² = 5,76
Donc HM = 2,4 cm.

e. La section du cône par le plan parallèle à sa base passant par M est un disque de centre H et de rayon 2,4 cm.

27 **a.** $V = 5^3 = 125$ cm³
b. $V = \pi \times 5^2 \times 4 \approx 314$ cm³
c. $V = (5 \times 4 \times 6) \div 3 = 40$ cm³
d. $V = (\pi \times 6^2 \times 6) \div 3 \approx 226$ cm³
e. Ordre croissant : **c** ; **a** ; **d** ; **b**

D1

11 **a.** La masse de poires achetées est proportionnelle au prix payé.

b. Masse de poires (kg)	3	6	2	1	0,5
Prix (€)	13,5	27	9	4,5	2,25

c. Ces poires sont vendues 4,5 € le kg.

d. $5{,}5 \times 4{,}5 = 24{,}75$
5,5 kg de ces poires coutent 24,75 €.

14 5 baguettes coutent 4,40 €
donc 1 baguette coute 0,88 €.

3 baguettes sont donc vendues :
$0{,}88 \times 3 = 2{,}64$ €.

33 **a.** $100 \text{ g} \times 70\ \% + 200 \text{ g} \times 85\ \%$
$= 70 \text{ g} + 170 \text{ g} = 240 \text{ g}$
La masse de cacao contenue dans le mélange ainsi constitué est de 240 g.

b. $240 \div 300 = 0{,}8 = 80\ \%$
Le pourcentage de cacao dans ce mélange de chocolat est de 80 %.

39 $16 \text{ h } 50 - 8 \text{ h } 30 = 8 \text{ h } 20 = \frac{25}{3} \text{ h}$

$v = d \div t = 625 \div \frac{25}{3} = 75$

La vitesse moyenne du trajet a été de 75 km/h.

48 Le débit global est donc de 45 L/min.
$50 \text{ m}^3 = 50\ 000 \text{ L}$
$50\ 000 \text{ L} \div 45 \text{ L/min} \approx 1111{,}11 \text{ min} \approx 1111 \text{ min } 7\text{s} \approx 18 \text{ h } 31 \text{ min } 7\text{s}$
Le remplissage complet de la piscine dure environ 18 h 31 min 7s.

D2

9 **a.** Pour Misnia : 30 – 0 = 30
Pour Lipsia : 22 – 2 = 20
Ce nombre correspond à l'amplitude thermique.

b. Pour Misnia :
0 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 13 ; 15 ; 21 ; 22 ; 26 ; 30 ; 30
La médiane est la moyenne des 6e et 7e températures, soit la moyenne de 13 et 15 : **14**.

Pour Lipsia :
2 ; 4 ; 9 ; 12 ; 13 ; 17 ; 18 ; 19 ; 21 ; 21 ; 22 ; 22
La médiane est la moyenne des 6e et 7e températures, soit la moyenne de 17 et 18 : **17,5**.

20
a. $3 + 6 + 7 + 9 + 5 + 2 + 1 + 1 = 34$
L'effectif total de la série est de 34.

b.
$(0\times3+1\times6+2\times7+3\times9+4\times5+5\times2+6\times1+7\times1):34$
$= 93 : 34 \approx 2{,}7$

Le nombre moyen de frères et sœurs est de 2,7 environ.

D3

7 **a.** Ils permettent d'affirmer que chacune des boules a autant de chances d'être choisie qu'une autre, c'est-à-dire qu'on est en situation d'équiprobabilité.

b. Au total, il y a dans l'urne 15 boules dont 6 bleues. La probabilité que la boule choisie soit bleue est donc de $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 40\ \%$.

c. Méthode 1 : Au total, il y a 15 boules dont 9 rouges. La probabilité que la boule choisie soit rouge est de $\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 60\ \%$.

Méthode 2 : « *La boule choisie est rouge.* » est l'évènement contraire de l'évènement « *La boule choisie est bleue.* ». Par conséquent, la probabilité que la boule choisie soit rouge est de :
$100\ \% - 40\ \% = 60\ \%$ (ou $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$).

13 **a.** La fréquence d'apparition de la somme 3 est de 15 %.

b. La fréquence d'apparition de la somme 1 est de 0 %. En effet, la somme des nombres lus est toujours supérieure ou égale à 2 et ne peut donc pas être égale à 1.

c. « 1 » pour le 1er dé et « 2 » pour le second ou « 2 » pour le 1er dé et « 1 » pour le second.

d. Au total, il y a 16 issues possibles à cette expérience : 1-1 ; 1-2 ; ….; 4-4.
Ces 16 issues sont équiprobables, puisque les dés sont équilibrés.
La probabilité que la somme soit 3 est donc de :
$\frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 12{,}5\ \%$.

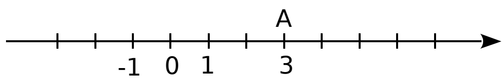
e. La fréquence d'apparition d'une issue tend à se rapprocher de la probabilité de cette issue : plus on fera de lancers, et plus elle s'en approchera. Mais il est normal que cette fréquence diffère de la probabilité théorique.

LEXIQUE · L'essentiel des notions

A

Abscisse (sur un axe)

Sur une droite graduée d'origine O, tout point A peut être repéré par un nombre relatif appelé son abscisse.



Ici, l'abscisse du point A est 3. On note A(3).

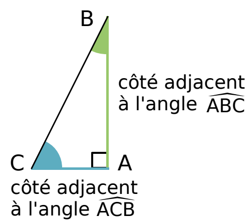
Abscisse (dans un repère)

L'abscisse d'un point dans un repère est la première coordonnée de ce point.

L'abscisse du point A(3 ; − 2) est 3.

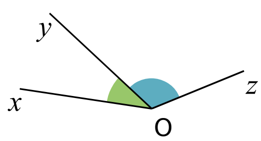
Adjacent (côté)

Dans un triangle rectangle, le côté adjacent à un angle aigu est le côté de cet angle qui n'est pas l'hypoténuse.



Adjacents (angles)

Deux angles adjacents sont deux angles qui ont leur sommet en commun, un côté commun et qui sont situés de part et d'autre de ce côté commun.



Affine (fonction)

Une fonction affine est une fonction qui, à un nombre x, associe le nombre $ax + b$ (a et b sont des nombres fixés).

Aire

L'aire d'une figure est la mesure de la surface occupée par cette figure, dans une unité donnée.

Altitude

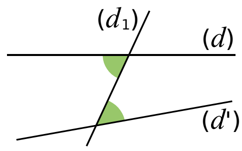
Pour un point repéré dans l'espace, l'altitude est la troisième coordonnée, encore appelée cote.

Algorithme

Un algorithme est une séquence finie d'instructions permettant de résoudre un problème donné.

Alternes-internes (angles)

Les angles verts sont alternes-internes.
Ils sont déterminés par les droites (d), (d') et la sécante (d_1).

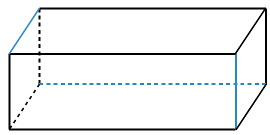


Antécédent

Si le nombre 2 a pour **image** 3 par la fonction f, alors on dit que 3 est un antécédent de 2 par f.

Arête

Pour un solide à faces planes, une arête est un des côtés d'une face de ce solide.

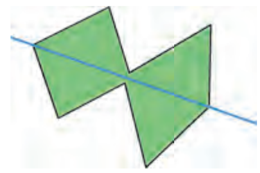


Arrondi

L'arrondi d'un nombre est la valeur approchée la plus proche de ce nombre à une précision donnée.

Axe de symétrie d'une figure

Un axe de symétrie d'une figure est une droite qui partage la figure en deux parties superposables par pliage le long de cette droite.

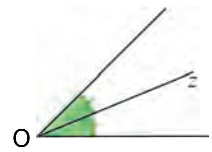


B

Bissectrice

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

C'est l'axe de symétrie de l'angle.



C

Caractère quantitatif

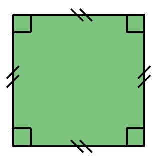
Un caractère est quantitatif lorsqu'on peut le mesurer et exprimer ses valeurs sous forme de nombres. Par exemple : une taille, une durée, une température.

Caractère qualitatif

Un caractère est qualitatif lorsqu'on ne peut pas le mesurer. Par exemple : la couleur des yeux, le film préféré, le département d'origine.

Carré (figure)

Un carré est un quadrilatère avec quatre côtés de même longueur et quatre angles droits.
C'est donc à la fois un losange et un rectangle.



Carré (d'un nombre)

Le carré d'un nombre est ce nombre multiplié par lui-même.

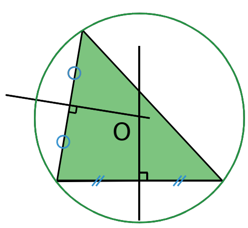
Le carré de 9 se note : $9^2 = 81$.

Cercle

Un cercle est formé de tous les points situés à la même distance d'un point donné (le **centre** du cercle). Cette distance est le **rayon** du cercle.
Le cercle de centre O et de rayon r est formé de tous les points situés à r unités du point O.

Cercle circonscrit

Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle qui passe par les trois sommets de ce triangle.
Son centre est le point de concours des médiatrices du triangle.

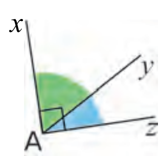


Circonférence

La circonférence d'un cercle est la longueur de ce cercle.

Complémentaires (angles)

Deux angles complémentaires sont deux angles dont la somme des mesures est égale à 90°.

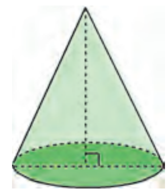


Concourantes (droites)

Des droites concourantes sont des droites qui se coupent en un même point.

Cône de révolution

Un cône de révolution est un solide qui est généré par un triangle rectangle tournant autour d'un des côtés de son angle droit.
La base du cône de révolution est un disque.

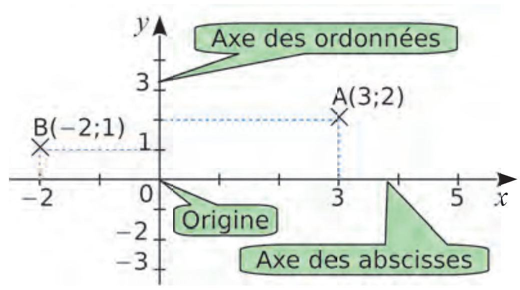


Conjecture

Émettre une conjecture, c'est résumer, dans un énoncé court et précis, une idée que l'on pense être vraie mais qui n'a pas encore été démontrée. Après démonstration, la conjecture devient propriété.

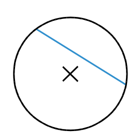
Coordonnées (d'un point)

Dans un plan muni d'un repère, tout point est repéré par un couple de nombres relatifs, appelé ses coordonnées : la première est l'abscisse et la seconde est l'ordonnée.



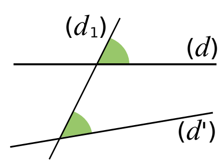
Corde

Une corde est un segment qui joint deux points d'un cercle.



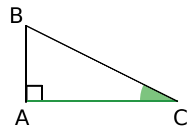
Correspondants (angles)

Les angles verts sont correspondants.
Ils sont déterminés par les droites (d), (d') et la sécante (d_1).



Cosinus (d'un angle aigu)

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.



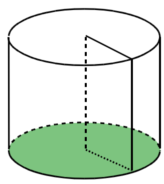
$$\text{cosinus } \widehat{ACB} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CA}{CB}$$

Croissant (ordre)

Ranger des nombres dans l'ordre croissant signifie les ranger du plus petit au plus grand.

Cylindre (de révolution)

Un cylindre de révolution est un solide engendré par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés. Ses bases sont deux disques identiques.



D

Décroissant (ordre)

Ranger des nombres dans l'ordre décroissant signifie les ranger du plus grand au plus petit.

Dénominateur

Dans une écriture fractionnaire, le dénominateur est le nombre situé en-dessous du trait de fraction.

Par exemple, 5 est le dénominateur de $\frac{4}{5}$.

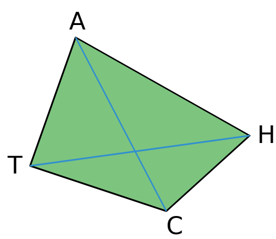
Développer

Développer une expression, c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Diagonale

Une diagonale est un segment qui joint deux sommets non consécutifs d'un polygone.

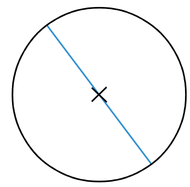
[AC] et [TH] sont les diagonales du polygone CHAT.



Diamètre

Un diamètre d'un cercle est une corde qui passe par le centre de ce cercle.

Le diamètre d'un cercle est la longueur des cordes qui passent par le centre de ce cercle.



Différence

Une différence est le résultat d'une soustraction.

Distance à zéro

La distance à zéro d'un nombre relatif est la distance entre ce nombre et zéro, sur une droite graduée.

La distance à zéro de -3 et $+3$ est 3.

Dividende (dans une division)

Dans une division euclidienne, le dividende est le nombre qu'on divise.

Diviseur (dans une division)

Dans une division euclidienne, le diviseur est le nombre par lequel on divise.

Diviseur (d'un nombre)

Soient a et b deux nombres entiers non nuls.
On dit que b est un diviseur de a si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Divisible

On dit que a est divisible par b si b est un diviseur de a.

Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de deux nombres entiers, c'est trouver deux nombres entiers (le quotient et le reste) tels que :

- dividende = diviseur $\times$ quotient + reste ;
- reste $<$ diviseur.

E

Échelle

Une représentation est dite « à l'échelle » lorsque les dimensions sur le plan sont proportionnelles aux dimensions réelles. L'échelle est le coefficient de proportionnalité, c'est-à-dire le quotient : $\dfrac{\text{dimensions sur le plan}}{\text{dimensions réelles}}$.

(Les dimensions sont dans la même unité.)

Effectif

L'effectif d'une valeur est le nombre de données d'une série qui ont cette valeur.

Équilatéral (triangle)

Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés ont la même mesure.

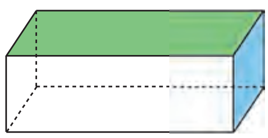
Étendue

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur prises par le caractère de la série.

F

Face

Une face d'un solide est l'un des polygones qui délimitent ce solide.



Facteur

Les facteurs sont les nombres multipliés dans un produit.

Dans le produit 4×5, les facteurs sont 4 et 5.

Factoriser

Factoriser une expression, c'est transformer une somme algébrique en un produit.

Fréquence

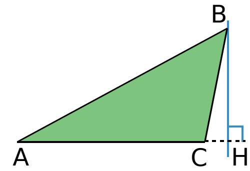
La fréquence d'une valeur d'un caractère est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total de la série}}$$

H

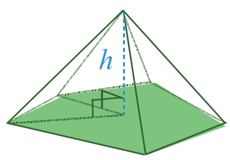
Hauteur d'un triangle

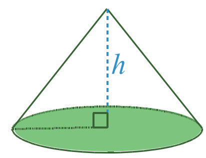
Dans un triangle, une hauteur est une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.



Hauteur (d'une pyramide, d'un cône)

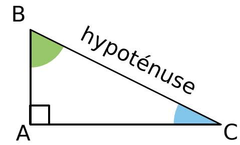
La hauteur d'une pyramide ou d'un cône est le segment issu de son sommet et perpendiculaire au plan de la base.





Hypoténuse

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. C'est aussi le plus grand côté.



I

Image

L'image d'un nombre par une fonction est le nombre résultat de la transformation par cette fonction.

Inférieur

On dit que a est inférieur à b (on note $a < b$) lorsque a est plus petit que b.

Inverse

L'inverse d'un nombre relatif a ($a \neq 0$) est le nombre qui, multiplié par a, donne 1.

On le note a^{-1}, c'est-à-dire $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Isocèle (triangle)

Un triangle isocèle est un triangle dont deux côtés ont la même mesure.

Isométriques (triangles)

Deux triangles sont isométriques si leurs côtés ont la même longueur deux à deux.

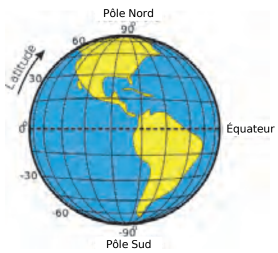
Irréductible (fraction)

Une fraction irréductible est une fraction que l'on ne peut plus simplifier.

L

Latitude

La latitude d'un point sur la Terre correspond à la distance angulaire, exprimée en degrés, qui sépare ce point de l'équateur. Les latitudes se comptent de $-90°$ à $+90°$ et la latitude de l'équateur est $0°$.

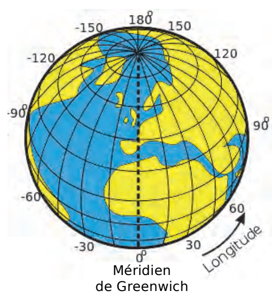


Linéaire (fonction)

Une fonction linéaire est une fonction qui, à un nombre x, associe le nombre ax (a est un nombre fixé).

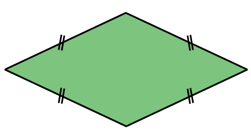
Longitude

La longitude d'un point sur la Terre correspond à l'angle formé par le méridien de ce point avec le méridien de Greenwich, exprimé en degrés. Les longitudes se comptent de $0°$ à $180°$ vers l'ouest et de $0°$ à $-180°$ vers l'est.



Losange

Un losange est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur.



M

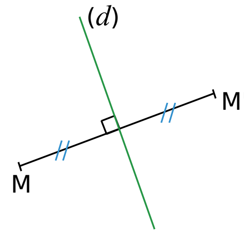
Médiane (d'une série statistique)

La médiane d'une série statistique ordonnée est une valeur qui partage la série en deux groupes de même effectif.

Médiatrice

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

C'est un axe de symétrie de ce segment.



Moyenne

Pour calculer la moyenne d'une série statistique :

- on additionne toutes les valeurs du caractère de la série ;
- on divise la somme obtenue par le nombre de valeurs de la série.

Multiple

Soient a et b deux nombres entiers non nuls.
On dit que b est un multiple de a si b peut s'écrire k $\times$ a, où k est un nombre entier.

N

Numérateur

Dans une écriture fractionnaire, le numérateur est le nombre situé au-dessus du trait de fraction.

Par exemple, 4 est le numérateur de $\frac{4}{5}$.

O

Opposé (d'un nombre)

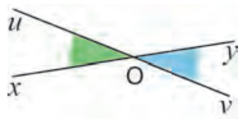
L'opposé d'un nombre relatif est le nombre qui a la même distance à zéro que ce nombre, et qui est de signe contraire.

La somme d'un nombre et de son opposé est égale à 0.

LEXIQUE · L'essentiel des notions

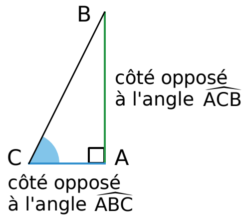
Opposés par le sommet (angles)

Deux angles opposés par le sommet sont deux angles qui ont un sommet commun et dont les côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre.



Opposé (côté)

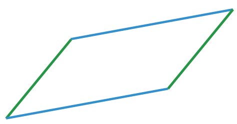
Dans un triangle rectangle, le côté opposé à un angle aigu est le côté qui n'est pas un côté de cet angle.



P

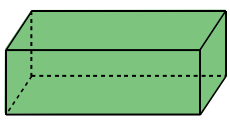
Parallélogramme

Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux.



Parallélépipède rectangle

Un parallélépipède rectangle est un solide dont les faces sont toutes des rectangles.



Patron

Le patron d'un solide est une disposition à plat des faces du solide. Une fois découpé et plié, il permet de construire le solide.

Pavé droit

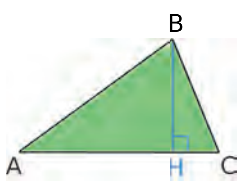
Un pavé droit est un parallélépipède rectangle.

Périmètre

Le périmètre d'une figure plane est la longueur du contour de cette figure.

Pied (de la hauteur)

Dans un triangle, on appelle pied de la hauteur relative à un côté, le point d'intersection de cette hauteur avec ce côté.



Polygone

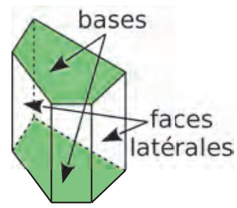
Un polygone est une figure fermée à plusieurs côtés.

Premier (nombre)

Un nombre premier est un nombre entier qui n'a que deux diviseurs distincts (1 et lui-même).

Prisme droit

Un prisme droit est un solide ayant deux faces polygonales parallèles et superposables (les bases), et des faces rectangulaires (les faces latérales).



Produit

Un produit est le résultat d'une multiplication.

Programme

Un programme est un langage compris et interprété par l'ordinateur, permettant l'exécution d'un algorithme donné.

Q

Quadrilatère

Un quadrilatère est un polygone qui a quatre côtés.

Quotient (dans une division)

Dans une division euclidienne, le quotient est le résultat de l'opération.

Quotient

Le quotient d'un nombre a par un nombre b non nul est le nombre qu'il faut multiplier par b pour obtenir a. On le note : $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$.

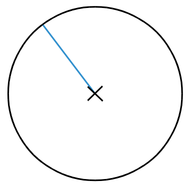
LEXIQUE · L'essentiel des notions

R

Rayon

Un rayon d'un cercle est un segment qui joint le centre et un point du cercle.

Le rayon d'un cercle est la distance entre le centre et un point du cercle.



Rectangle

Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Rectangle (triangle)

Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.

Repère

Un repère est un système d'axes permettant de repérer des points. Les axes du repère se coupent en un point appelé l'origine du repère.

S

Scientifique (écriture ou notation)

L'écriture scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^n$ où la distance à zéro de a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclu) et n un nombre entier relatif.

Section

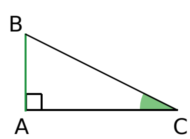
Une section est la figure géométrique obtenue lorsqu'on coupe un solide par un plan.

Semblables (triangles)

Deux triangles sont semblables si les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Sinus

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.



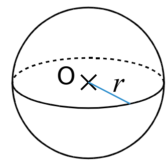
$$\text{sinus } \widehat{ACB} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC}$$

Somme

Une somme est le résultat d'une addition.

Sphère

La sphère de centre O et de rayon r est formée de tous les points de l'espace situés à r cm du point O.

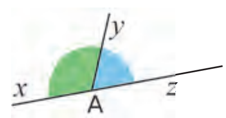


Supérieur

On dit que a est supérieur à b (on note $a > b$) lorsque a est plus grand que b.

Supplémentaires (angles)

Deux angles sont supplémentaires si la somme de leurs mesures est égale à 180°.



T

Tangente

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.

$$\text{tangente } \widehat{ACB} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{ACB}}$$

Terme

Dans une addition ou une soustraction, les termes sont les nombres ajoutés ou retranchés.
Dans l'addition $4 + 5$, les termes sont 4 et 5.
Dans la soustraction $12 - 7$, les termes sont 12 et 7.

Trapèze

Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles.

V

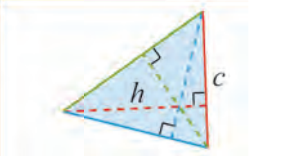
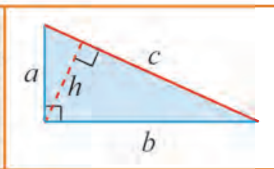
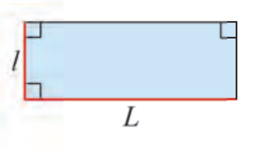
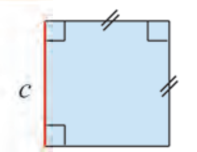
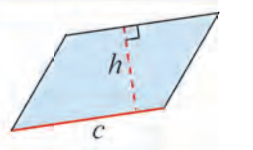
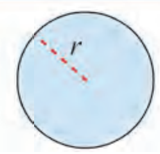
Volume d'un solide

Le volume d'un solide est la mesure de l'espace occupé par ce solide, dans une unité donnée.

Formulaire

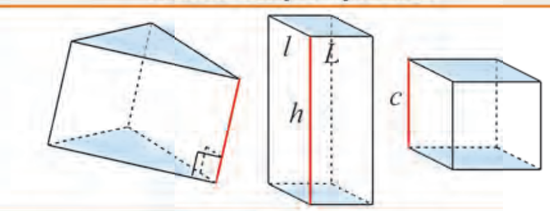
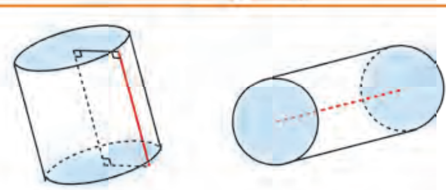
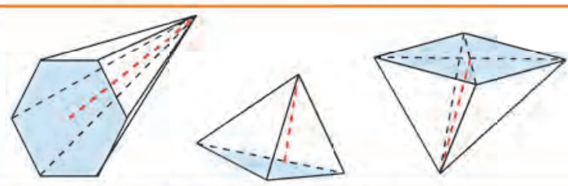
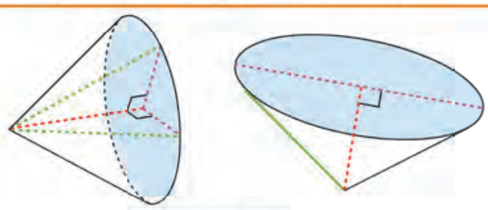
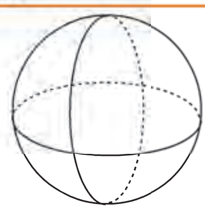
Périmètres $\mathcal{P}$ et aires $\mathcal{A}$

Exemples de conversion : 25,4 cm² = 2 540 mm² ; 50π m² = 0,005π hm² (ou ha) ≈ 0,016 ha.

Triangle		$\mathcal{A} = \dfrac{c \times h}{2}$	**Triangle rectangle**		$\mathcal{A} = \dfrac{a \times b}{2} = \dfrac{c \times h}{2}$
Rectangle		$\mathcal{A} = L \times l$ $\mathcal{P} = 2L + 2l$ ou $\mathcal{P} = 2(L + l)$	**Carré**		$\mathcal{A} = c \times c = c^2$ $\mathcal{P} = 4 \times c = 4c$
Parallélo-gramme		$\mathcal{A} = c \times h$	**Disque**		$\mathcal{A} = \pi \times r \times r = \pi r^2$ $\mathcal{P} = 2 \times \pi \times r = 2\pi r$ ou $\mathcal{P} = \pi \times$ diamètre

Volumes $\mathcal{V}$ et aires latérales $\mathcal{A}_L$

Exemples de conversion : 1 dm³ = 1 L ; 1 L = 1 000 mL ; 2 534 cm³ = 2,534 dm³ ou L.

	Solide en perspective	Formules
Prisme droit		$\mathcal{V}$ = Aire base × h $\mathcal{V}_{\text{cube}} = c \times c \times c = c^3$ $\mathcal{V}_{\text{pavé droit}} = L \times l \times h$ $\mathcal{A}_L$ = Périmètre base × h
Cylindre de révolution		$\mathcal{V}$ = Aire base × h $\mathcal{V} = \pi r^2 \times h$ $\mathcal{A}_L$ = Périmètre base × h $\mathcal{A}_L = 2\pi r \times h$
Pyramide		$\mathcal{V} = \dfrac{\text{Aire base} \times h}{3}$
Cône de révolution		$\mathcal{V} = \dfrac{\text{Aire base} \times h}{3}$ $\mathcal{V} = \dfrac{\pi r^2 \times h}{3}$
Boule		$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\mathcal{A} = 4\pi r^2$

Crédits iconographiques : pp. 12-13, 21, 28, 34, 45, 58, 62-63, 72, 89-90, 144, 148, 153, 155 à 157, 166, 179 : Wikimedia Commons / pp. 15-16, 21-22, 24, 28-29, 36, 38, 44, 47-48, 57, 59 à 64, 66, 70-71, 85, 92, 100 à 103, 106, 116, 123-124, 148, 150 à 154, 157, 160, 163, 170, 173 à 176, 179 : pixabay / p. 4 : F. Voisin-Demery/flickr / p. 49 : publicdomainevectors.org / pp. 53, 61-62, 96, 175 : Texas Instruments Incorporated / p. 66 : ©Igor Mojzes/fotolia.com / p. 76 : marfis75/flickr / p. 88 : ©*Fouad J/flickr* / p. 89 : ©Mark Fugarino/flickr / p. 173 : ©Ian McKellar/flickr / pp. 91, 94-95, 187 : ©julientromeur/fotolia.com / pp. 140, 149, 163, 172 : openclipart.

Imprimé en Italie par ROTOLITO LOMBARDA
Dépôt légal : avril 2016 - ISBN : 978-2-36246-147-7
Génération 5 - 82 rue du Bon Pasteur, 73000 Chambéry
www.generation5.fr